ОБЩЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ, 2012 ГОД
Методика и педагогическая практика

Васильева Антонина Гаврильевна

Муниципальное общеобразовательное бюджетное учреждение

«Средняя общеобразовательная школа №14 г. Якутска

с углубленным изучением отдельных предметов им. М. П. Бубякиной»

Республика Саха (Якутия)

ОДИН ПОДХОД К РЕШЕНИЮ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Задачи с параметрами занимают одно из основных мест в материалах ЕГЭ и вступительных экзаменах. Такие задачи имеют исследовательский характер, нужно рассмотреть всевозможные случаи относительно параметра, что затрудняет научить учащихся нахождению полного решения исходных задач. Подобрать тот подходящий ключ к решению задач с параметрами не всегда удается. В данной статье дается один из подходов к решению квадратного уравнения с параметрами, а именно подход через графические соображения..

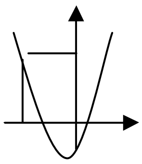
Пусть дан квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Обозначим через x_1, x_2 корни уравнения $f(x) = 0$, причем x_0 - абсцисса вершины параболы, k, t - абсциссы характерных точек параболы. Рассмотрим квадратное уравнение $f(x) = 0$, где некоторые коэффициенты заменены параметрами. Чтобы доказать, что квадратное уравнение имеет корни, необходимо найти дискриминант уравнения и решить неравенство D>0. Однако, в некоторых случаях можно найти более простые способы доказательства неотрицательности дискриминанта, используя очевидные графические соображения

Так если $a > 0$, то для доказательства того, что уравнение имеет два решения достаточно указать одну точку $x_к$, в которой $f(x_к) < 0$. В случае $a < 0$, указать положительное значение функции в некоторой фиксированной точке, т.е $f(x_к) > 0$. Таким образом получили необходимое и достаточное условие существования решения квадратных уравнений, а именно неравенство $a \cdot f(x) < 0$. Чаще всего в качестве $x_к$ берут значения 0; 1;-1; абсциссу вершины параболы или некоторые числа k; t.[1]

Решение практически многих задачи с параметром, в которой явным образом задан квадратный трехчлен, сводится к рассмотрению следующих семи возможностей [2]:

1)Оба корня больше некоторого заданного числа k (рис 1), т.е. $k < x_1 < x_2$.

Тогда решается система: $\begin{cases} a \cdot f(k) > 0 \\ D. > 0 \\ x_0 > k \end{cases}$



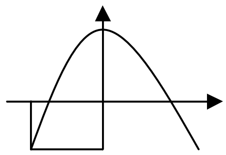


Рис 1.

2) Оба корня меньше некоторого заданного числа k, т.е. $x_1 < x_2 < k$

Тогда решаем систему: $\begin{cases} a \cdot f(k) > 0 \\ D > 0 \\ x_0 < k \end{cases}$

3) Оба корня принадлежат заданному промежутку $(k;t)$, т.е. $k < x_1 < x_2 < t$.

Решаем систему: $\begin{cases} a \cdot f(k) > 0 \\ a \cdot f(t) > 0 \\ D > 0 \\ k < x_0 < t \end{cases}$

4) Только меньший корень принадлежит заданному промежутку, т.е. $k < x_1 < t < x_2$. Тогда имеем систему: $\begin{cases} a \cdot f(k) > 0 \\ a \cdot f(t) < 0 \end{cases}$

5) Только больший корень принадлежит заданному промежутку: $x_1 < k < x_2 < t$. Тогда имеем систему: $\begin{cases} a\cdot f(k) < 0 \\ a\cdot f(t) > 0 \end{cases}$

6) Оба корня лежат вне заданного промежутка : $x_1 < k < t < x_2$.

Имеем: $\begin{cases} a\cdot f(k) < 0 \\ a\cdot f(t) < 0 \end{cases}$

7) заданное число k лежит между корнями (т.е. один из корней больше k, а другой меньше k): $x_1 < k < x_2$, тогда решаем неравенство $a\cdot f(k) < 0$.

Рассмотрим применение данного подхода к решению следующей задачи:

При каком значении параметра т корни уравнения

$(2m-1)x^2 - 6mx + m - 2 = 0$ *имеют разные знаки.*

Сравним два способа решения данной задачи. По условию задачи уравнение имеет два корня разного знака, поэтому имеем графики вида:

Первый способ. В первом способе применим графические соображения. В случае $a > 0$ парабола направлена вверх и $f(0) < 0$ Отсюда составляем систему: $\begin{cases} a > 0 \\ f(0) < 0 \end{cases}$

В случае $a < 0$, парабола направлена вниз и $f(0) > 0$. Тогда система имеет вид: $\begin{cases} a < 0 \\ f(0) > 0 \end{cases}$

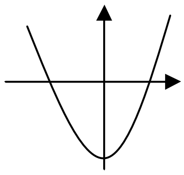
Совокупность исходных двух систем равносильна неравенству $a\cdot f(0) < 0$.

Так как $a = 2m-1, f(o) = m-2$ имеем квадратное неравенство: $(2m-1)(m-2) < 0$. Решая данное неравенство, получаем ответ: $(0{,}5;2)$

Второй способ: Решим задачу с применением теоремы Виета. Так как по условию задачи уравнение имеет два корня разного знака, то $2m-1\neq 0$.

Находим приведенный вид уравнения: $x^2-\frac{6m}{2m-1}x+\frac{m-2}{2m-1}=0$.

График имеет вид:



Составляем систему неравенств: $\begin{cases} D>0 \\ x_1.x_2<0 \end{cases}$

Решая данную систему,

$$\begin{cases} \frac{36m^2}{(2m-1)^2}-\frac{4(m-2)}{2m-1}>0 \\ \frac{m-2}{2m-1}<0 \end{cases}$$

получаем ответ: $(0{,}5;2)$.

Как видим во втором случае нужно решить систему двух дробно-рациональных неравенств, когда как в первом случае решение сводится нахождению решения простого квадратного неравенства.

Литература

1. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач // Учебное пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1989 – С.102-106.

2. Шестаков С.А., Юрченко Е.В. Уравнения с параметром // пособие для учителей, учащихся математических и профильных классов. – М.: Слог, 1993 – С. 7-11.