

ОБЩЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ, 2012 ГОД

Методика и педагогическая практика

Грук Любовь Владимировна

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа №603

Фрунзенского района Санкт-Петербурга

ФУНКЦИИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Функциональная линия – одна из основных содержательных линий школьного курса математики. Согласно требованиям к уровню подготовки выпускника, ученик должен научиться находить значения функции, заданной различными способами, строить графики, определять свойства функции по графику, использовать графические представления при решении уравнений, неравенств и систем. Формированию этих умений каждый учитель уделяет большое внимание на уроках алгебры. Почти каждому человеку в своей жизни приходится сталкиваться с таблицами, графиками, а это различные способы задания функции. Во многих дисциплинах есть большое количество формул, которые выражают опять-таки функциональные зависимости. В старшей школе после знакомства с производной появляется новый мощный аппарат для исследования функций и решения других задач. Кроме того, систематизируя материал по теме «Функция» на уроках итогового повторения, нужно остановиться, хотя бы ненадолго, на истории возникновения и формирования этого понятия, которое используется в различных науках, подчеркнуть, что функциональная зависимость отражает взаимосвязь реальных величин.

При изучении математики на профильном уровне от понятия функции можно плавно перейти и к другому очень важному понятию – математической



модели. Далее я предлагаю материалы, которые можно использовать на занятиях элективного курса в классе социально-экономического профиля.

Первая часть – лекция, в ходе которой рассматриваются необходимые теоретические сведения о математических моделях, этапах работы с ними. Во второй части занятия рассматриваются оптимизационные математические модели для решения экономических задач, в частности, задача линейного программирования и графический метод ее решения, который позволяет показать хорошо знакомые учащимся линейные неравенства, линейные функции с новой для них стороны. Это способствует расширению математического кругозора и межпредметных связей, дает возможность приобщиться к широкому классу экстремальных задач, играющих важную роль не только в математике, но и других науках. Для лекции я использовала следующие материалы.

Модель – материальный или идеальный объект, который строится для изучения исходного объекта (оригинала) и отражает наиболее важные качества и параметры оригинала. Процесс построения моделей называется моделированием. Различают модели материальные (макеты, уменьшенные копии и пр.) и идеальные (знаковые), в которых реальные понятия заменяются знаками и фиксируются в виде текста, графика, таблицы и др. Математические модели давно и успешно применяются в физике. Теперь они широко используются и в химии, и в биологии, и в экономике. Математическое моделирование относится к классу знакового моделирования. Модели могут создаваться из любых математических объектов: чисел, функций, уравнений, неравенств, систем, графиков, графов.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, никогда не бывает тождественна рассматриваемому объекту, не передает всех его свойств и особенностей, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется



возможность математически формулировать задачу его изучения и воспользоваться для анализа его свойств математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы данного объекта. Этот аппарат позволяет описать широкий круг фактов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т. е. прогнозировать результаты будущих наблюдений.

Работа с математической моделью состоит из трех этапов: формализации, решения задачи и интерпретации. На этапе формализации осуществляется осмысление задачи, выделение наиболее важных качеств, свойств, величин и параметров; введение обозначений; составление системы ограничений, которым должны удовлетворять введенные величины; формулировка и запись условий, которым должно удовлетворять искомое оптимальное решение.

Решение задачи подразумевает выбор способа решения и проведение необходимых выкладок. Интерпретация – это сопоставление результата с реальностью (проверка на адекватность) и уточнение модели.

Математические модели бывают функциональные, вероятностные (включают случайные величины), оптимизационные (содержат функцию, которая измеряет качество решения), динамические (учитывают фактор времени), статические.

С незапамятных времен перед человеком возникают практические проблемы нахождения наибольшего и наименьшего, наилучшего и наихудшего. Как правило, в задачах подобного рода достижение некоторого результата может быть осуществлено не единственным способом и приходится отыскивать наилучший способ достижения результата. Однако в одной и той же задаче в разных ситуациях наилучшими могут быть совершенно разные решения, зависящие от выбранного или заданного критерия. Задачи такого характера получили название экстремальных задач.



Теорию задач на отыскание наибольших и наименьших величин называют теорией экстремальных задач, или теорией оптимизации. Решением задач на максимум и минимум занимались крупнейшие ученые прошлого – Евклид, Архимед, Аполлоний, Герон, Ферма, Кеплер, Торричелли, Бернулли, Ньютон, Лейбниц, Эйлер, Лагранж, С. Ковалевская и др.

Долгое время каждая задача на экстремум решалась индивидуально, но с конца 17-го века начали появляться общие методы решения. В итоге сформировались основные разделы теории экстремальных задач: математическое программирование, выпуклое программирование, вариационное исчисление, теория оптимального управления.

Основы выпуклого (в том числе линейного) программирования были заложены советским ученым Л. В. Канторовичем, который в 1939 году опубликовал книгу «Математические методы организации и планирования производства». В 40-е годы идеи линейного программирования широко распространились по всему миру усилиями американского экономиста Т.Купманса и американского математика Д.Данцига. В 1975 году Л.Канторовичу и Т.Купмансу была присуждена Нобелевская премия по экономическим наукам за создание новой математической теории (линейного программирования) и применение этой теории к экономике.

Математическая модель экстремальной задачи имеет свою особенность: в ее состав всегда входит некоторая функция, которую требуется при заданных условиях минимизировать (максимизировать), т. е. найти ее оптимальное значение. Такая функция называется целевой. Задачи, в которых целевая функция связана с переменными линейной зависимостью, а ограничения задаются линейными уравнениями и неравенствами, принято называть задачами линейного программирования. Если число переменных системы ограничений и целевой функции в математической модели такой задачи равно двум или трем, то такую задачу можно решить графически.



В экономике широкое практическое применение нашли задача линейного программирования, транспортная задача, задачи сетевого планирования, линейные балансовые модели и их обобщения, некоторые модели динамического программирования и т. д.

Во второй части занятия рассматривается графический способ решения задачи линейного программирования, а затем учащиеся индивидуально, в парах или по группам решают задачи. Приведу примеры задач.

Задача 1. Намечается выпуск мужских и женских костюмов. На женский костюм требуется 1 м шерсти, 2 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат, на мужской костюм – 3,5 м шерсти, 0,5 м лавсана и 1 человеко-день трудозатрат. Всего имеется 350 м шерсти, 240 м лавсана и 150 человеко-дней трудозатрат. По плану предусмотрен выпуск не менее 110 костюмов, причем необходимо обеспечить прибыль не менее 1400 денежных единиц. Требуется определить оптимальное (максимизирующее прибыль) количество костюмов каждого вида, если прибыль от реализации женского костюма составляет 10 денежных единиц, а от реализации мужского – 20 денежных единиц.

Задача 2. Для изготовления двух видов изделий А и В завод расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, запас которых ограничен. На изготовлении указанных изделий заняты станки двух типов Р и К в количестве, указанном в таблице.

Затраты на одно изделие		А	В	Ресурсы
Материалы	Сталь (кг)	10	70	320
	Цветные металлы (кг)	20	50	420
Оборудование	Станки Р (станко-ч)	300	400	6200
	Станки К (станко-ч)	200	100	3400
Прибыль на одно изделие (в ДЕ)		3	8	

Необходимо определить план выпуска продукции, при котором будет достигнута максимальная прибыль.

Задача 3. Некоторому заводу требуется составить оптимальный план выпуска двух видов изделий при определенных возможностях четырех видов машин. План выпуска этих изделий надо составить так, чтобы от реализации



изготовленной продукции завод получил наибольшую прибыль. Оба вида изделий последовательно обрабатываются этими машинами. В плане должно быть предусмотрено, что первая машина ежедневно может обрабатывать эту продукцию лишь в течение 8 ч, вторая – 12 ч, третья – 12 ч, четвертая – 9 ч. В таблице указано время, необходимое для обработки каждого изделия этих двух видов (в часах). Нуль означает, что изделие машинами данного вида обрабатывать не надо. Завод от реализации одного изделия I вида получает 4 денежных единицы, а от реализации одного изделия II вида – 6 денежных единиц прибыли.

Изделия	Виды машин			
	1-й	2-й	3-й	4-й
I	1	0,5	1	0
II	1	1	0	1
Возможное время работы машины (в часах)	18	12	12	9

Задача 4. Небольшое предприятие выпускает изделия типов А и В. Для производства изделия А требуется 40 кг металла, 1 лист пластика и 2 м³ древесины, а для изделия В – 30 кг металла, 4 листа пластика и 4 м³ древесины. Количество сырья ограничено: металла не более 750 кг, пластика – 64 листа, древесины – 70 м³. Прибыль от реализации изделия А составляет 240 денежных единиц, а изделия В – 320 денежных единиц. Необходимо составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

Задача 5. Фермерское хозяйство занимается возделыванием двух культур – зерновых и картофеля – и располагает следующими ресурсами: пашня – 5000 га, труд – 300 тыс. человеко-часов, возможный объем тракторных работ – 28000 условных га.

Культуры	Затраты на 1 га посева		Стоимость валовой продукции с 1 га, ДЕ
	Труда, чел.-ч.	Тракторных работ, усл. га	
Зерновые	30	4	400
Картофель	150	12	1000

Составить план использования посевных площадей с целью получения максимального объема валовой продукции (в стоимостном выражении).



При обсуждении можно предложить учащимся найти и другие способы для решения подобных задач. Например, один из моих учеников предложил решение с помощью экономических рассуждений, а другой – компьютерную программу для решения таких задач с помощью симплекс-метода.

Умения работать с функциями и математическими моделями необходимы и для подготовки к ЕГЭ. Если посмотреть характеристики заданий демонстрационного варианта по математике, то можно заметить, что многие из них моделируют реальную или близкую к реальной ситуацию. Например, задание В2 на чтение графика функции, в котором график характеризует изменение некоторой величины в зависимости от времени (температуры, стоимости акций и др.); В4 – несложная текстовая задача (возможно, с табличными данными) на оптимальное решение; задание В12, приводящее к решению уравнения или неравенства, изначально имеющее физическое, химическое, экономическое содержание, В13 – текстовая задача.

В заключении хочу отметить следующее. В новых образовательных стандартах говорится о том, что изучение математики на интегрированном и базовом уровнях должно обеспечить «сформированность представлений о математике как части мировой культуры и ее месте в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира, сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления, а на профильном уровне – сформированность умения моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат». Очевидно, что для достижения таких результатов работу с математическими моделями надо начинать как можно раньше, так как она формирует не только предметные, но и общеучебные, в том числе и информационно-интеллектуальные, умения: выделение в объекте существенных свойств и особенностей, определение



причинно-следственной зависимости, исследовательские умения (постановка задачи, выработка гипотезы, перевод задачи с языка одной науки на язык другой, выбор методов решения, проверка на адекватность и т. д.).

Список литературы

1. Баврин Н. И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике: Кн. Для учащихся 10-11 кл. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2000.
2. Беляева Э. С., Монахов В. М. Экстремальные задачи. Пособие для учащихся. М.: Просвещение, 1977.
3. Коршунова Н. И., Плясунов В. С. Математика в экономике. – М.: Издательство «Вита-Пресс», 1996.
4. Стандарты второго поколения: примерные программы по учебным предметам. Математика 5-9 классы. – М.: Просвещение, 2011.
5. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. (Библиотечка «Квант». Вып. 56).

