Дягилева Людмила Юрьевна

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Средняя общеобразовательная школа №18»

городского округа город Салават Республики Башкортостан

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ В ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВАХ

Если в основании логарифма есть переменная, то решение требует рассмотрения двух случаев. Метод рационализации позволяет логарифмическое неравенство заменить на дробно-рациональное неравенство при допустимых значениях переменной, что существенно упрощает дальнейшее решение.

Разберем суть метода. Метод рационализации заключается в следующей равносильной замене:

при $a>0$ и $a\neq 1$ $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0, \\ (a-1)(f(x)-g(x))>0. \end{cases}$

Докажем, что при $a>0$, $a\neq 1$, $f(x)>0$, $g(x)>0$, то

$\log_a f(x)>\log_a g(x) \Rightarrow (a-1)(f(x)-g(x))>0$

Рассмотрим случай, когда $0<a<1$, тогда $a-1<0$. При $0<a<1$ $f(x)<g(x)$, а значит $f(x)-g(x)<0$. Произведение двух отрицательных множителей является положительным числом, т.е. $(a-1)(f(x)-g(x))>0$

При $a>1$, $a-1>0$; $f(x)>g(x)$, а значит $f(x)-g(x)>0$. Произведение положительных множителей есть положительное число, т.е. $(a-1)(f(x)-g(x))>0$

Таким образом, при всех допустимых значениях основания a

$\log_a f(x) > \log_a g(x) \;\Rightarrow\; (a-1)(f(x)-g(x)) > 0.$

Докажем обратное: $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0 \;\Rightarrow\; \log_a f(x) > \log_a g(x)$

$$(a-1)(f(x)-g(x)) > 0 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a-1<0, \\ f(x)-g(x)<0, \end{cases} \\ \begin{cases} a-1>0, \\ f(x)-g(x)>0. \end{cases}\end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a<1, \\ f(x)<g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} a>1, \\ f(x)>g(x). \end{cases}\end{array}\right. \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Из равносильности замены $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ на $(a-1)(f(x)-g(x)) > 0$ при ОДЗ вытекают следующие равносильные замены:

$\log_a f(x) - \log_a g(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; (a-1)(f(x)-g(x)) > 0,$

$\log_a f(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \log_a f(x) > \log_a 1 \;\Leftrightarrow\; (a-1)(f(x)-1) > 0,$

$\log_a f(x) > 1 \;\Leftrightarrow\; \log_a f(x) > \log_a a \;\Leftrightarrow\; (a-1)(f(x)-a) > 0.$

Следует заметить, что равносильные замены справедливы не только для знака > но и <. В следующей таблице знак > , < заменю на v.

Таким образом, в следующей таблице приведем равносильные замены:

№	Логарифмическое выражение	Равносильная замена
1	$\log_a f(x) - \log_a g(x)$ v 0	$(a-1)(f(x)-g(x))$ v 0
2	$\log_a f(x)$ v 0	$(a-1)(f(x)-1)$ v 0,
3	$\log_a f(x)$ v 1	$(a-1)(f(x)-a)$ v 0.
4	$\log_a f(x) + \log_a g(x)$ v 0	$(a-1)(f(x)\,g(x)-1)$ v 0
5	$\log_a f(x) - \log_b f(x)$ v 0	$(a-1)(f(x)-1)(b-1)(b-a)$ v 0
6	$\log_a f(x) * \log_b g(x)$ v 0	$(a-1)(f(x)-1)(b-1)(g(x)-1)$ v 0

Рассмотрим применение метода на типовых заданиях С3.

Решим логарифмическое неравенство (июнь ЕГЭ 2012) $\log_{x+2}\frac{(x-1)^2}{x+5}\le 0$

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x+2>0, \\ x+2\ne 1, \\ x\ne 1, \\ x+5>0. \end{cases}$ Получим $x\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

$$\log_{x+2}\frac{(x-1)^2}{x+5}\le 0 \Leftrightarrow \log_{x+2}\frac{(x-1)^2}{x+5}\le \log_{x+2}1$$

Применим метод рационализации:

$$(x+2-1)\bullet(\frac{(x-1)^2}{x+5}-1)\le 0 \Leftrightarrow (x+1)\bullet\frac{(x-1)^2-x-5}{x+5}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)(x+1)}{(x+5)}\le 0$$

Рассмотрим функцию $y=\frac{(x-1)(x-4)(x+1)}{(x+5)}\le 0$

Нули функции: $x=\pm 1$;$x=4$. Функция не существует при $x=-5$.

Решением неравенства является промежуток $x\in(-5;4]$.

С учетом ОДЗ: $x\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$, получим окончательный ответ

$x\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;4]$.

Ответ: $x\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;4]$.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru