ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ, 2015 ГОД
Опыт и перспективы внедрения Федеральных государственных образовательных стандартов

Лазарь Людмила Павловна

муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

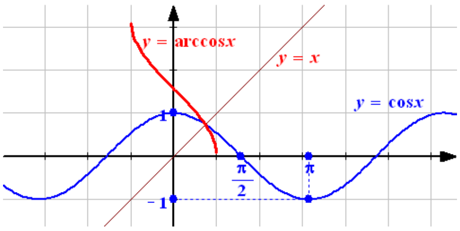
«Кадетская средняя общеобразовательная школа

имени Героя Российской Федерации В.И. Шарпатова»

Г. Новый Уренгой, Ямало-Ненецкий автономный округ

ПРОГРАММА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ»

Профильная подготовка.



Содержание

1.Пояснительная записка

2. Учебный тематический план

3 .Содержание курса.

4. Литература

5. Приложение

Занятие №1

Занятие №2

Занятие №3

Занятие №4

Занятие №5

Занятие №6

Занятие №7

Занятие №8

Конференц-зал
электронный журнал
электронное средство массовой информации
ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

Пояснительная записка.

Проблема: расширение базового курс математики, обеспечения возможности познакомиться с интересными вопросами математики, повышение базисной компетентности учащихся по математике, предоставление дополнительной подготовки к ЕГЭ.

Актуальность: задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями, часто вызывают у школьников старших классов значительные трудности. Связано это, прежде всего, с тем, что в действующих учебниках и учебных пособиях подобным задачам уделяется не слишком большое внимание, и если с задачами на вычисление значений обратных тригонометрических функций учащиеся еще как-то справляются, то уравнения и неравенства, содержащие эти функции, нередко ставят их в тупик. Ни в одном учебнике (включая учебники для классов с углубленным изучением математики) не излагается методика решения даже простейших уравнений и неравенств такого рода.

Новизна: предлагаемый курс является дополнительным фактором формирования положительной мотивации, в изучении математики. Факультативный курс направлен на интеграцию знаний, способствует формированию общекультурной компетентности учащихся. Предлагаемая программа посвящена методам решения уравнений и неравенств и преобразованию выражений, содержащих обратные тригонометрические функции и построение непредсказуемых их графиков.

Цель курса – создание условий для реализации профильного обучения; формирование целостной системы математических знаний и базы для продолжения математического образования в ВУЗах различного профиля.

Для реализации этой цели необходимо решение **следующих задач:**

- расширение сферы математических знаний учащихся;
- углубление знаний учащихся по теории обратных тригонометрических функций;
- обобщить основные методы решения уравнений, неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции;

- рассмотреть методы построения графиков обратных тригонометрических функций.
- развитие исследовательских умений и навыков учащихся.

Требования к уровню подготовки учащихся.

**Учащиеся должны знать*:

– определение обратных тригонометрических функций, их свойства;

– основные формулы;

– методы решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции;

– способы построения графиков функций: y= arcsinx, y= arccosx, y= arctgx, y = arcctgx.

* *Учащиеся должны уметь*:

– применять свойства и основные формулы обратных тригонометрических функций;

– решать простейшие уравнения и неравенства;

– выполнять преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции;

– применять различные методы решения уравнений и неравенств;

– решать уравнения и неравенства с параметрами, содержащие обратные тригонометрические функции;

– владеть методами исследования свойств, строить графики обратных тригонометрических функции.

В процессе изучения курса предполагаются следующие ***виды обучения***:

- традиционные формы (объяснительно – иллюстративные) обучения,
- деятельное (самостоятельное добывание знаний в процессе решения учебных проблем, развитие творческого мышления и познавательной активности учащихся)
- инновационное (самообразование, саморазвитие учащихся посредством самостоятельной работы с информационным материалом).

Варианты итоговой аттестации могут быть следующие: тестирование, зачёты, написание рефератов на предложенные учителем темы; индивидуальные задания, в которых необходимо провести самостоятельное исследование, тематические контрольные работы.

Обратные тригонометрические функции широко используются в математическом анализе. Значение темы « Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции» в школьном курсе математики трудно переоценить. Любое тригонометрическое уравнение решается на основе обратных тригонометрических функций. Данный курс, рассматривает построение графиков обратных тригонометрических функций. Предлагается более 30 различных графиков обратных тригонометрических функций. Рассматриваются различные методы вычисления обратных тригонометрических выражений.

Приведенное тематическое планирование курса является примерным. Учитель может варьировать количество часов, отводимых на изучение отдельных тем, с учетом уровня подготовки учащихся.

Учебный тематический план курса

№ п/п	Наименование темы	Всего часов	Дата
1	Обратных тригонометрических функций их свойства и графики. -история развития тригонометрии; -определение обратных тригонометрических функций; -свойства функции, нахождение области определения, значения функции; - построение графиков обратных тригонометрических функций.	3	
2	Решение простейших уравнений, содержащих аркфункции.	2	
3	Операции над обратными тригонометрическими функциями. - построение графиков тригонометрических функций от значений обратных.	2	

4	Преобразований выражений, содержащих обратные тригонометрические функции -вычисление значений тригонометрических функций от значений обратных; -формулы приведения, связанные с обратными тригонометрическими функциями; - решение неравенств, содержащих аркфункции.	4	
5	Вычисление значений выражений, записанных в виде суммы (разности) обратных тригонометрических функций с помощью чертежа, выполненного на бумаге в клетку.	2	
6	Геометрический подход к вычислению значений выражений, содержащих аркфункции.	1	
7	Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями. Построение графиков.	2	
8	Решение уравнений, содержащих параметры	1	
9	Итоговое занятие	1	

Содержание курса

Занятие №1

Обратных тригонометрических функций их свойства и графики.

(3 часа)

История возникновения тригонометрии. Определение обратных тригонометрических функций, их свойства. Построение графиков функции $y = \mathrm{arc\,sin}\, x$, $y = \mathrm{arc\,cos}\, x$, $y = \mathrm{arc\,tg}\, x$, $y = \mathrm{arc\,ctg}\, x$. Нахождение области значения, области определения функции, построение графиков обратных тригонометрических функций.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Формы контроля: проверка задач самостоятельного решения.

Занятие № 2

Решение простейших уравнений, содержащих аркфункции. (2 часа)

Решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, с помощью введения новой переменной, относительно которой решается квадратное уравнение, а так же по определению обратных тригонометрических функций.

Методы обучения: объяснение, выполнение тренировочных упражнений, решение практических задач.

Формы контроля: самостоятельного работа

Занятие №3

Операции над обратными тригонометрическими функциями.(2 часа)

Рассматриваются и доказываются тождества выполняемых для тригонометрических функций от значений обратных тригонометрических функций. Построение графиков функций вида y =sin(arcsin x),

y = cos (arcos x), y = tg (arcctg x), y = tg (arcctg x)

Методы обучения: лекция, объяснение, фронтальный опрос, выполнение тренировочных упражнений.

Формы контроля: проверка задач самостоятельного решения.

Занятие №4

Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции .(4 часа)

Вычисление значений тригонометрических функций от значений обратных. Формулы приведения, связанные с обратными тригонометрическими функциями. Решение уравнений и неравенств, содержащих аркфункции.

Методы обучения: фронтальный опрос, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Формы контроля: проверка задач самостоятельного решения, проверка тестов

Занятие№5

Вычисление значений выражений, записанных в виде суммы (разности) обратных тригонометрических функций с помощью чертежа, выполненного на бумаге в клетку.(2 часа)

Построение углов на бумаге в клетку в прямоугольном треугольнике, геометрическое построение суммы и разности обратных тригонометрических функций.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Формы контроля: проверка задач самостоятельного решения.

Занятие №6

Геометрический подход к вычислению значений выражений, содержащих аркфункции. (1часа)

Геометрический подход к вычислению значений обратных тригонометрических выражений. Построение прямоугольных треугольников с заданными катетами.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Формы контроля: проверка задач самостоятельного решения.

Занятие №7

Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями. Построение графиков.(2 часа)

Рассматриваются функции вида y = arc sin (sin x), y = arccos (cos x),

y = arc tg (tg x), y = arc ctg (ctg x). Проводятся исследования этих функций и строятся графики. Рассматриваются тождества.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Формы контроля: самостоятельная работа, творческие задания (презентации выполненные учащимися)

Занятие №8

Решение уравнений, содержащих параметры. (1 час)

Рассматриваются уравнения обратных тригонометрических функций, содержащих параметр.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Формы контроля: проверка задач самостоятельного решения.

Занятие №9

Итоговое занятие.(1час)

Подведение итогов, защита творческих работ учащихся (презентации, выполненные самостоятельно учащимися по пройденным темам).

Литература

1. Гурский И.П. «Функции и построение графиков» «Просвещение» Москва 1968 год
2. Васильева В. А., Кудрина Т. Д., Молодожникова Р. Н. Методическое пособие по математике, для поступающих в ВУЗы. – М.: МАИ, 1992.
3. Ершова А.П., Голобородько В. В. Алгебра. Начала анализа. – М.: ИЛЕКСА, 2003.
4. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во ВТУЗы / Под ред. М. И. Сканави. – М.: Высшая школа, 2003.
5. Журналы «Математика в школе».
6. Андронов И.К. , Окунев А.К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач». « Просвещение» Москва 1967 год
7. В.А. Далингер «Начала математического анализа» ГУОмГПУ 2009

Приложение.

Занятие №1

Определение обратных тригонометрических функций их свойства и графики.

Цель: *дать понятие обратных тригонометрических функций, рассмотреть свойства этих функция и построение графиков обратных тригонометрических функций.*

I .История развития тригонометрии.

Тригонометрия в своем развитии прошла две стадии. Первой стадией положены начала в античном мире; в связи с запросами астрономии возникает учение о взаимной связи круговых дуг и их хорд, и составляются таблицы хорд через каждые полградуса до 180^0 в трудах александрийских ученых Гиппарха (IIв. до н.э.) и Птолемея (II в. до н. э.) В дальнейшем потребности географии, геодезии, военного дела способствовали развитию зачатков нового предмета, заложенного Гиппархом и Птолемеем. Особенно усиленно шло развитие тригонометрии в средневековое время, в первую очередь в Индии Узбекистане, Азербайджане. Творения ученых этого периода привели к выделению нового самостоятельного предмета в Азербайджане Насирэддином Туси (1201- 1274) в его «Трактате о полном четырехстороннике» , а позднее в 1595 году в Европе в трудах Варфоломея Питискуса « Тригонометрия , или краткий обзорный трактат о решении треугольников».

Итак, на первой стадии тригонометрия сложилась как теория, вычислительного приема решения треугольников и фигур, сводимых к ним, причем решения проводились с помощью таблиц синусов и тангенсов, основой для вычисления которых служили теоремы Пифагора и Птолемея.

Вторая стадия, начало которой положено в трудах Франсуа Виетта (1540-1630), полностью раскрывается в школе академика Леонарда Эйлера (1707-1783), когда создается аналитическая теория тригонометрических
(круговых) функций. Начиная с XVII в., тригонометрические функции начали применять к решению уравнений, задач механики, оптики, электричества, радиотехники, для описания колебательных процессов, распространения волн, движения различных механизмов, для изучения переменного электрического тока и т.д. Поэтому тригонометрические функции всесторонне и глубоко исследовались и приобрели важное значение для всей математики.

Название обратной тригонометрической функции образуется от названия соответствующей ей тригонометрической функции добавлением приставки «арк-» (от лат. *arc* — дуга). Это связано с тем, что геометрически значение обратной тригонометрической функции можно связать с длиной дуги единичной окружности (или углом, стягивающим эту дугу), соответствующей тому или иному отрезку.

II. Определение обратных тригонометрических функций и их графики

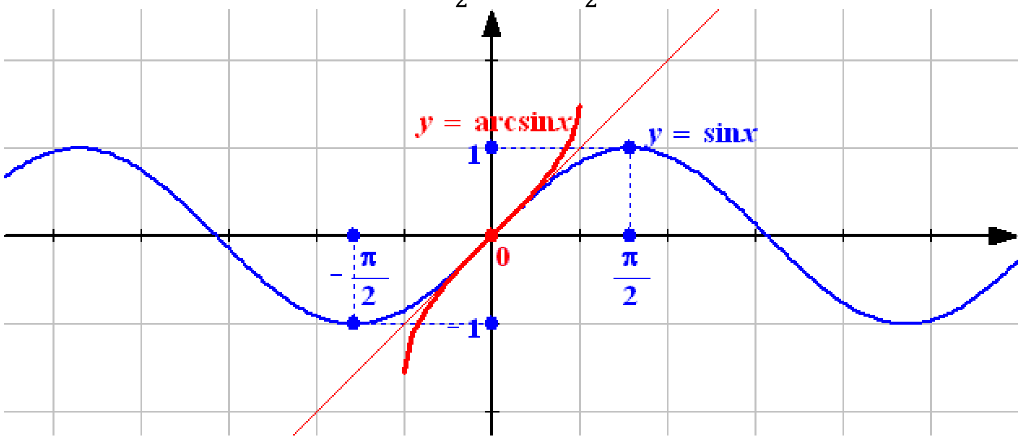
1.Функция y = arcsin x

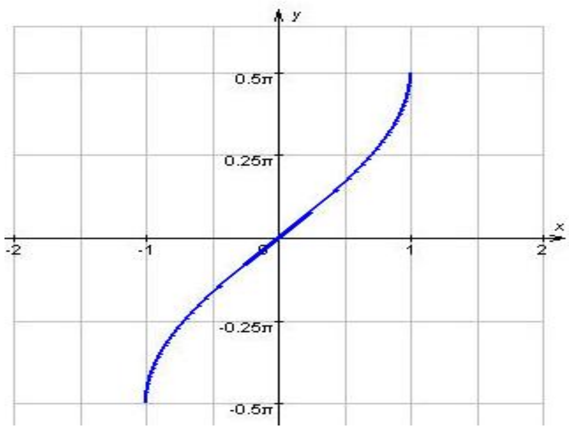
Функция $y = sin\ x$ монотонна и принимает все значения от -1 до 1 на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Значит, по теореме об обратных функциях она обратима, и имеет обратную функцию $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Её обозначают $x = arcsin\ y$. Поменяв, как обычно, x и y местами, пишут: $y = arcsin\ x$. Итак, $y = arcsin\ x$ (читают арксинус x) – это функция, обратная функции $y = sin\ x$, $x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. График функции $y= arcsin\ x$ может быть получен из графика функции $y = sin\ x$,

$x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ с помощью преобразования симметрии относительно прямой

$y = x$.

Функция y= arcsinx, где $-1\leq x \leq 1$ и $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, называется арксинусом.





y =arcsin x

Свойства функции y = *arcsin x*

1. D (x) = [-1; 1].

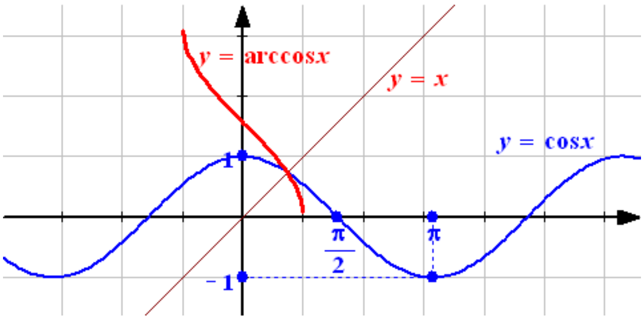
2. E (x) = $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

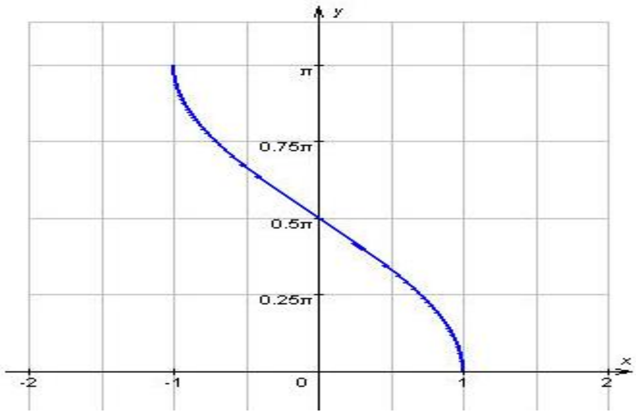
3. Функция является нечетной: *arcsin* (-*x*) = -*arcsin* x

4. Функция возрастает.

5. Функция непрерывна.

2.Функция y = arccos x , где -1≤ x ≤ 1 и 0≤ y ≤ π называется арккосинусом. Функция y = arc cos x непрерывная на отрезке $[-1; 1]$ и является убывающей на нем, так как функция y = cos x на отрезке $[0; \pi]$ убывает. График функции y= arccosx получается из графика функции y = cosx с помощью осевой симметрии относительно прямой y = x.

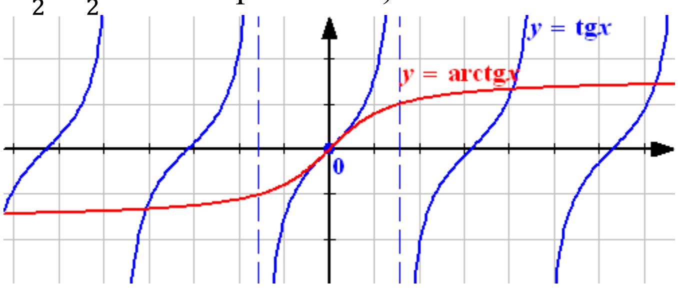


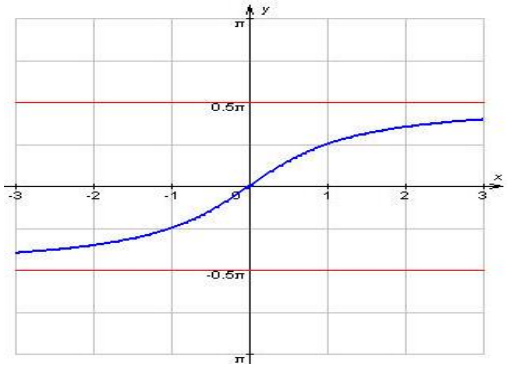


y = arccos x

3.Функция y = arctg x , обратная функции для y = tg x, взятой на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, называется арктангенсом. Она непрерывна на всей числовой оси, монотонно возрастает на ней и принимает значения от - $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$

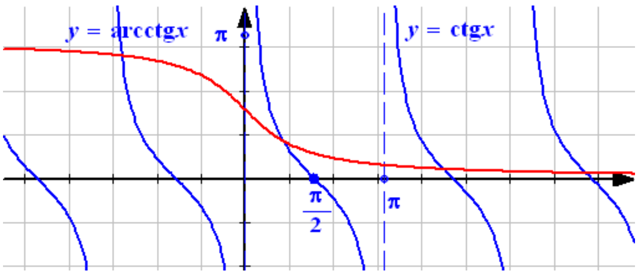
(самих значений - $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ она не принимает).

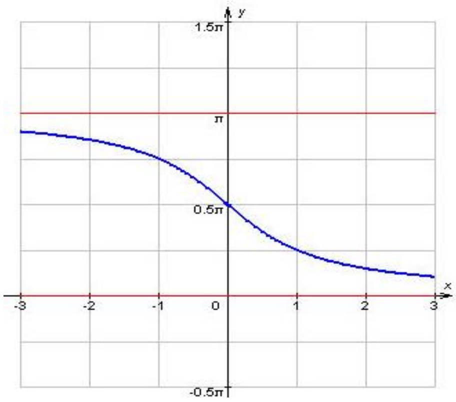




y = arc tg x

4.Функция y = arcctg x, обратная функция для y = ctg x на промежутке $0 < x < \pi$, называется арккотангенсом. Функция y = arcctg x непрерывна на все числовой оси, монотонно убывает на ней и принимает значения от π до 0 (не принимая значений π и 0). Графики y = ctg x и y = arcctg x также симметричны относительно прямой y = x.





y = arcctg x

III. Нахождение области определения, области значения обратных тригонометрических функций, построение их графиков.

1.Найти область определения функции.

а)y = arccos (x-3) + arcctg $\sqrt{x-2}$.

Конференц-зал
электронный журнал
электронное средство массовой информации
ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

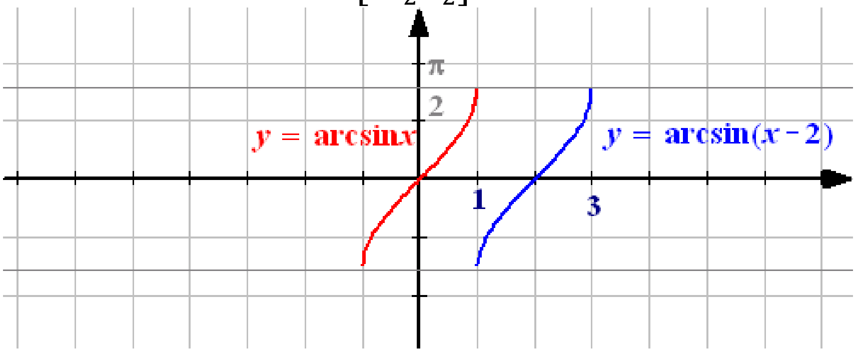
Решение: $\begin{cases} |x-3| \le 1, \\ x-2 \ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \le x \le 4, \\ x-2 \ge 0. \end{cases}$ D(y) = [2; 4]

Ответ:[2;4].

б) Найти область определения и построить график.
y = arcsin(x-2)

Решение. D (arcsin) = $[-1; 1]$, поэтому -1$\le$ x $-$ 2 $\le$ 1 $\Leftrightarrow$ 1$\le$ x $\le$ 3.

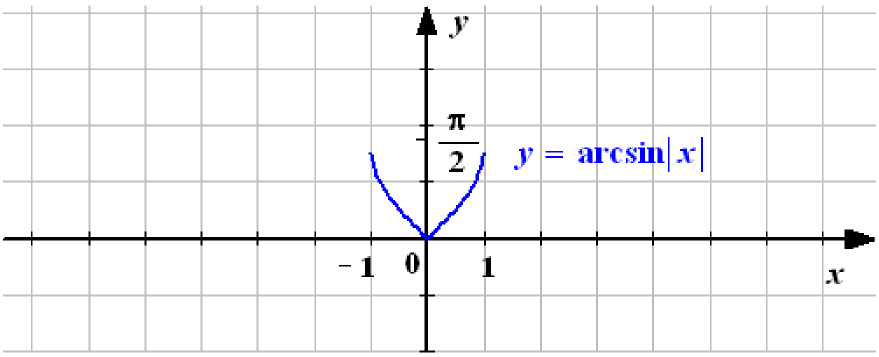
D (y) = $[1; 3]$, E (y) = $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



2. Построить график функции y = arcsin$|x|$

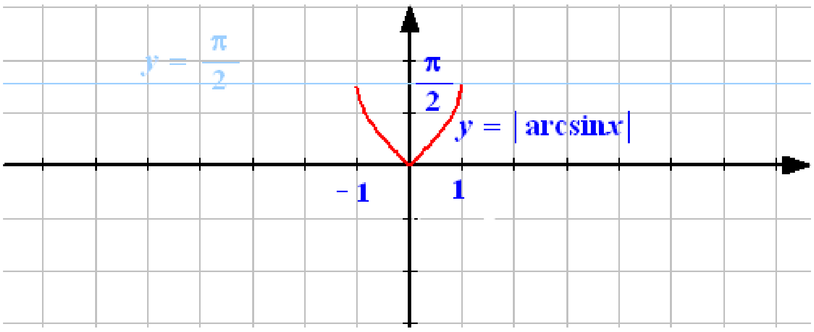
D (y) = $[-1; 1]$ E (y) = $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, функция четная, правая ветвь графика та же, что для функции y = arcsin x, так как при x≥0,

arcsin $|x|$ = arcsin x



3 Построить график функции y =$|arcsinx|$

График этой функции получается из графика функции y = arcsin x, если часть графика, расположенную ниже оси Ox, отобразить относительно этой оси.



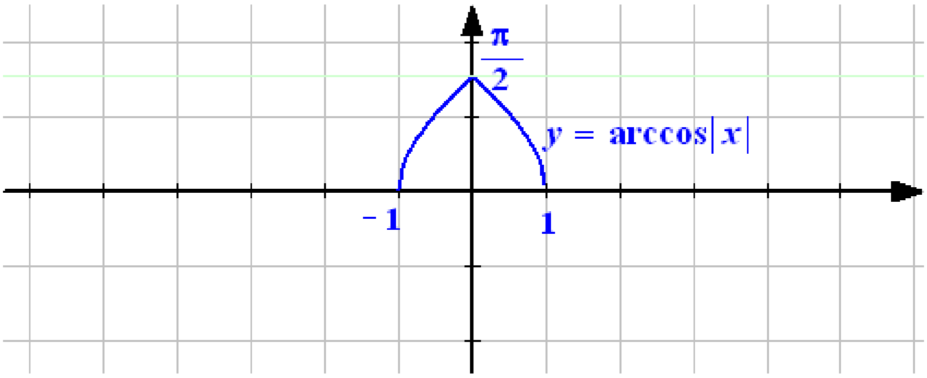
4 Построить график функции $y = \left|\boldsymbol{arcsin}|\boldsymbol{x}|\right|$

Так как функция y = arcsin $|x|$ положительная на всей области определения. То график функции y= $\left|arcsin|x|\right|$, будет тот же, что и график функции y = arcsin $|x|$.

5.Постройте график $y = |\boldsymbol{arccos\,x}|$, $y = \boldsymbol{arccos}|\boldsymbol{x}|$, $y = \left|\boldsymbol{arccos}|\boldsymbol{x}|\right|$.

Функция y = arccos $|x|$ четная, Правая часть графика та же, что и для функции y = arccos x , левая ей симметричная.

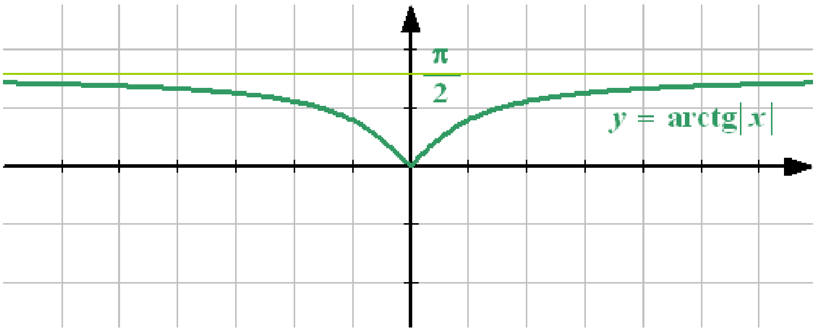
График функции y = $|\text{arccos}\,x|$ тот же, что и y = arccos x , так как функция y = arccos x положительна на всей области определения.



6. Построить график функций $y = \boldsymbol{arctg}\ |\boldsymbol{x}|$, $y = |\boldsymbol{arctg\ x}|$,

y =$\left|\boldsymbol{arctg}|\boldsymbol{x}|\right|$

Функция y = arctg$|x|$ четная, Правая ветвь графика та же, что и для функции y = arctg x , левая ей симметрична.



Тот же вид имеют графики функций y = $|arctgx|$, y = $\left|arctg|x|\right|$.

7. Построить график функции y = arcctg$|x|$, y = $|arcctgx|$,
y = $\left|arcctg|x|\right|$.

Функция y = arcctg$|x|$ четная, Правая часть графика та же, что и для функции y = arcctg x, левая симметрична.

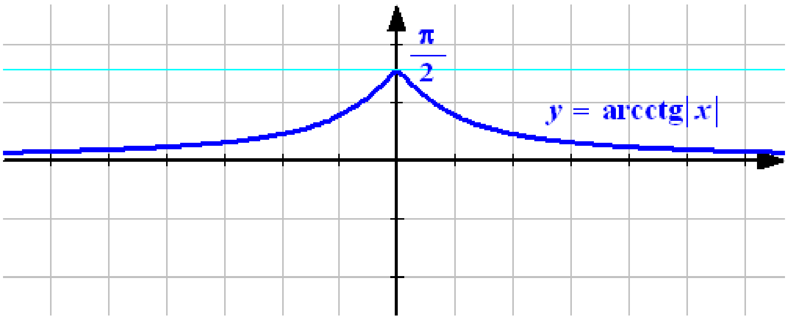


График функции y = $|arcctgx|$ тот же, что и для функции y = arcctg x, так как эта функция положительна на всей области определения.

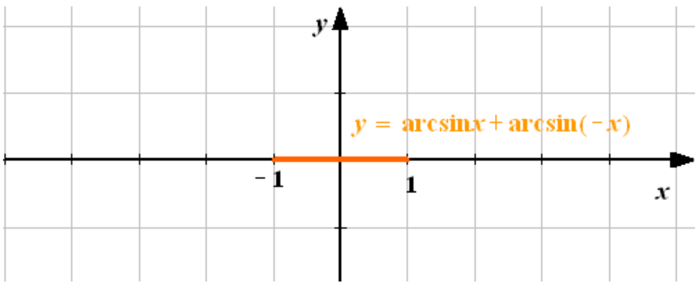
По той же причине график функции y = $\left|arcctg|x|\right|$ тот же, что и для функции y = arcctg $|x|$.

8. Постройте график функции

а) y= arcsin x + arcsin (-x).

Решение: arcsin x + arcsin(-x) = arcsin x – arcsin x = 0 , где -1 $\leq x \leq$ 1,

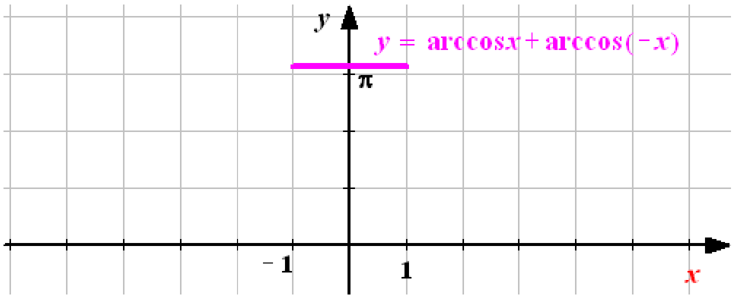
y=0, $|x| \leq 1$



б) y = arcos x + arcos (-x).

Решение. arcos x +arcos(-x) = arcos x + π - arcos x = π

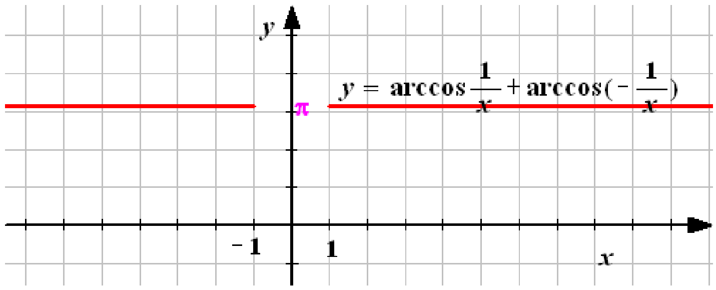
Построим график функции y = π, где ,$|x| \le 1$.



в) y = arccos $\frac{1}{x}$ + arccos (- $\frac{1}{x}$).

Решение. arccos $\frac{1}{x}$ + arcos (- $\frac{1}{x}$) = arcos $\frac{1}{x}$ $+\ \pi$ - arcos $\frac{1}{x}$ = π, где $|x| \ge 1$.

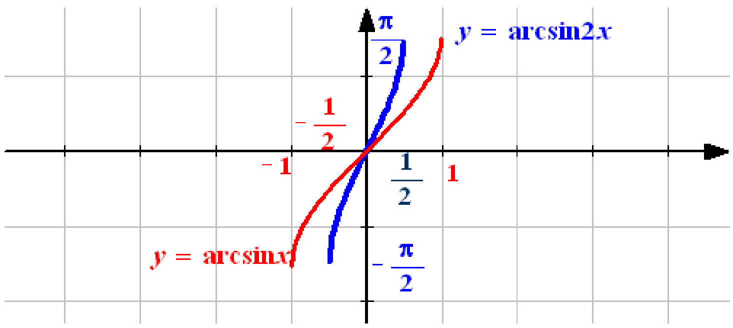
y= π.



9. Постройте график y = arc sin 2x. $-1 \le 2x \le 1$

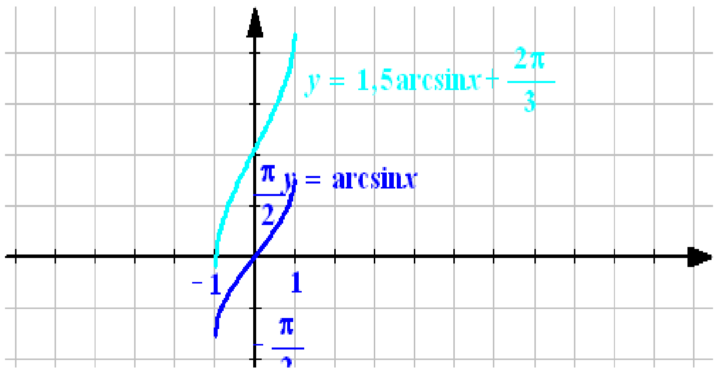
$-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

D(y)= $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ E (y) = $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$



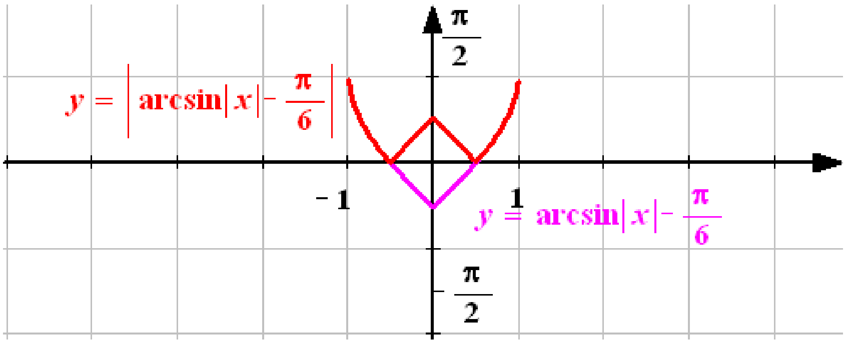
10. Постройте график функции y = 1,5 arcsin x + $\frac{2\pi}{3}$.

D (y) = $[-1; 1]$, E(y) = $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{17\pi}{12}\right]$

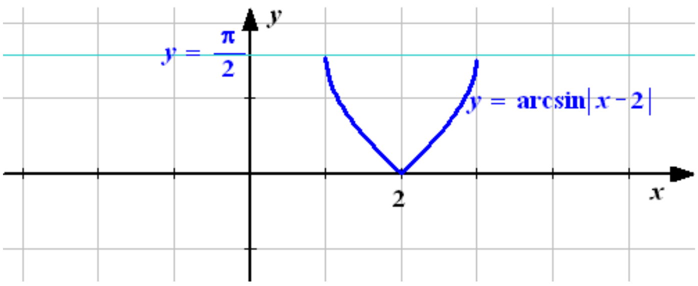


11.Построить график функции $y = \arcsin|x| - \frac{\pi}{6}$ ***и*** $y = \left|\arcsin|x| - \frac{\pi}{6}\right|$

D(y) $=[-1; 1]$ E(y) $= \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$. D(y) $=[-1; 1]$, E(y) $= \left[0: \frac{\pi}{3}\right]$



12.Построить график функции $y = \arcsin|x-2|$

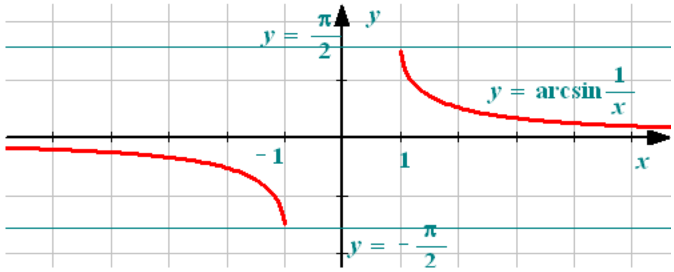


$y = \arcsin\frac{1}{x}$. D(y) : $\left|\frac{1}{x}\right| \le 1$, $|x| \ge 1$. D(y) = $(-\infty: -1] \cup [1; +\infty)$

функция нечетная, E(y) $=[-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (0; \frac{\pi}{2}]$

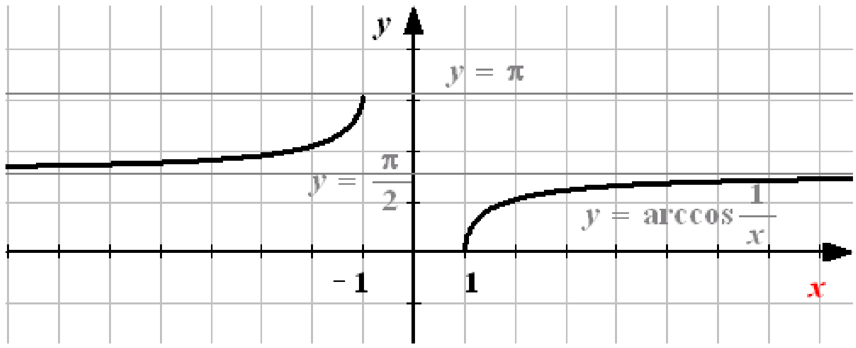
13.Построить график функции $y = \arccos\frac{1}{|x|}$.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru



$y = \arccos\frac{1}{x}$, $\left|\frac{1}{x}\right| \le 1$, $|x| \ge 1$, D(y) = $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

E(y) = $[0;\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2};\pi]$



Занятие № 2

Решение простейших уравнений, содержащих аркфункции.

Решите уравнение.

1. 2arc $\sin^2$ x – 7arc sin x + 3 = 0.

Решение. Обозначим arc sin x = a, где a $\in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и решим квадратное уравнение $2a^2 - 7a + 3 = 0$.

$D = 25$, $a_1 = 3$, $a_2 = 0{,}5$.

а) arc sin x = 3 - нет корней, так как $3 \notin \left[-\frac{\pi}{2}:\frac{\pi}{2}\right]$

б) arc sin x = 0,5, x = sin 0,5, x $\approx$ 0,4794

Ответ: 0, 4749

2. arc sin $(x^2 - 4x+2) = -\frac{\pi}{2}$

Решение. $-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. $x^2 - 4x + 2 = \sin(-\frac{\pi}{2})$, $-1 \in [-1; 1]$.

$$x^2 - 4x + 3 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 3.$$

Ответ: 1; 3.

3. $\arcsin(x^2 - 3x + 0{,}5) = \frac{\pi}{6}$.

Решение: $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. $x^2 - 3x + 0{,}5 = \sin\frac{\pi}{6}$, $0{,}5 \in [-1; 1]$.

$x^2 - 3x + 0{,}5 = 0{,}5$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Ответ: 0; 3.

4. $\arcsin^2 x - \frac{\pi}{2}\arcsin x + \frac{\pi^2}{18} = 0$.

Решение: $\frac{D}{4} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{18} = \frac{\pi^2}{144}$; $\arcsin x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{12}$,

а) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; $\sin\frac{\pi}{3} = x$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} \in [-1; 1]$,

б) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; $\sin\frac{\pi}{6} = x$; $x = 0{,}5$, $0{,}5 \in [-1; 1]$.

Ответ: 0,5; $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\arccos^2 x - \frac{3\pi}{4}\arccos x + \frac{\pi^2}{8} = 0$.

Решение: $\frac{D}{4} = \frac{9\pi^2}{64} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{64}$; $\arccos x = \frac{3\pi}{8} \pm \frac{\pi}{8}$;

а) $\arccos x = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $x = \cos\frac{\pi}{2}$; $x = 0$

б) $\arccos x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $x = \cos\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1;1]$.

Ответ: 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Аналогично можно решить уравнения:

6. $\arcsin^2 x - \frac{3\pi}{4}\arcsin x + \frac{\pi^2}{4} = 0$;

7. $\operatorname{arctg}^2 x - \frac{5\pi}{12}\operatorname{arctg} x + \frac{\pi^2}{24} = 0$;

8. $2\arcsin^2 x - 5\arcsin x + 2 = 0$;

9. $6\arcsin x - \pi = 0$.

10. Упростить выражение.

$\log_{\pi}(\arccos(-0{,}5) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

Решение. arcos (-0,5) = $\pi - arcos0{,}5 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$,

$$\text{arc tg}\ (-\sqrt{3}\ ) = -\frac{\pi}{3}.\ \log_{\pi}(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \log_{\pi}\pi = 1$$

Ответ: 1.

11. Решить уравнение.

$$2\text{arc sin x} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{9\text{arc sin x}}.$$

Решение. arc sin x $\in [-1; 1]$, при x = 0 arc sin x = 0. Следовательно область определения уравнения x $\in [-1; 0] \cup [0; 1]$.

Введем новую переменную. t = arc sin x.

$2t = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi^2}{t}$ или $18t^2 - 3\pi t - \pi^2 = 0$.

$t_1 = \frac{\pi}{3}$, $t_2 = -\frac{\pi}{6}$, оба корня входят в область определения уравнения.

а) arc sin x = $\frac{\pi}{3}$, x = sin $\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) arc sin x = $-\frac{\pi}{6}$, x = $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$.

ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{1}{2}$.

Занятие №3

Цель: сформировать умение преобразовывать выражения, содержащие обратные тригонометрические функции.

I. Операции над обратными тригонометрическими функциями.

Для обратных тригонометрических функций выполняются некоторые тождества.

1. **cos (arccos *a*) = *a*; *a*∈[-1;1]**

<u>*Доказательство:*</u> По определению: arccos a = x , x принадлежит $[0;\pi]$. Тогда cos x = a. Вместо x, во второе выражение, подставим то, чему он равен, т.е. arccos a = x. Получим cos (arccos a) = a.

2. sin (arcsin *a*) = *a*; *a*∈ [-1;1]

3. tg (arctg *a*) = *a*; $a \in R$ **tg (arcctg a) =** $\frac{1}{a}$, $a \neq 0$

4.ctg (arcctg *a*) = *a* ; $\in R$, **ctg (arctg a) =** $\frac{1}{a}$ **,** $a \neq 0$

5. cos (arcsin *a*) = $\sqrt{1-a^2}$; $a \in [-1;1]$.

<u>*Доказательство*</u>: Возьмем arcsin *a* за *t*: arcsin *a* = *t*, *t* принадлежит

$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Тогда по определению sin t = *a*, Так как arcsin *a* принадлежит

$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, то cos (arcsin a) ≥ 0, откуда по основному тригонометрическому

тождеству:

$$\left.\begin{array}{l}\cos t = \pm\sqrt{1-\sin^2 t} = \pm\sqrt{1-a^2} \\ t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}].\end{array}\right\} \Rightarrow \cos t = \sqrt{1-a^2},$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2}$$

6.sin (arccos *a*) = $\sqrt{1-a^2}$ **;** $a \in [-1;1]$ Доказывается аналогично.

7. tg (arccos *a*) = $\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

Докажем. tg (arccos *a*)= $\frac{\sin(\arccos a)}{\cos(\arccos a)} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

8. sin (arctg a) = $\pm\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

9. tg (arcsin a) = $\pm\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

10. arcsin *a* + arccos *a* = $\frac{\pi}{2}$**,** $|a| \leq 1$

<u>*Док-во:*</u>

$$\frac{\begin{cases}-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \arccos a \leq \pi\end{cases}}{-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a + \arccos a \leq \frac{3\pi}{2}}$$

Применим формулу синуса суммы двух аргументов.

sin (arcsin *a* + arccos *a*) = sin (arcsin *a*) · cos (arccos *a*) + cos (arcsin *a*) · sin (arccos *a*)

$= a \cdot a + \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-a^2} = a^2 + 1 - a^2 = 1.$

Таким образом, sin (arcsin *a* + arccos *a*) =1

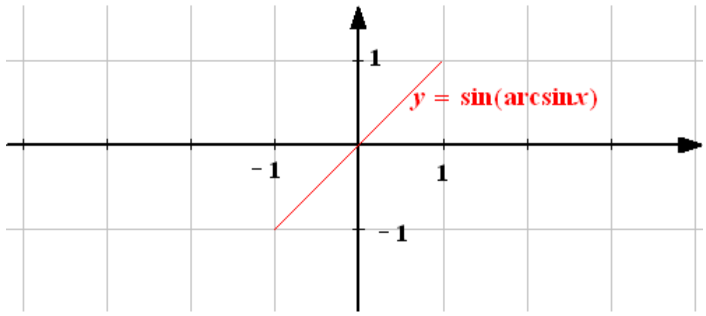
На числовой окружности это самая верхняя точка. Возьмем координату, которая удовлетворяет ОДЗ:

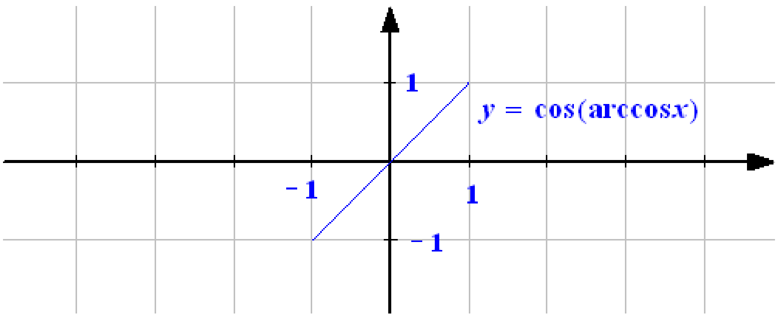
$\frac{-\pi}{2} \le$ arcsin *a* + arccos *a* $\le \frac{3\pi}{2}$, и эта точка $\frac{\pi}{2}$. Из этого следует, что arcsin *a* + arccos *a* $= \frac{\pi}{2}$

11. arctg *a* + arcctg *a* = $\frac{\pi}{2}$, *a*-любое число.

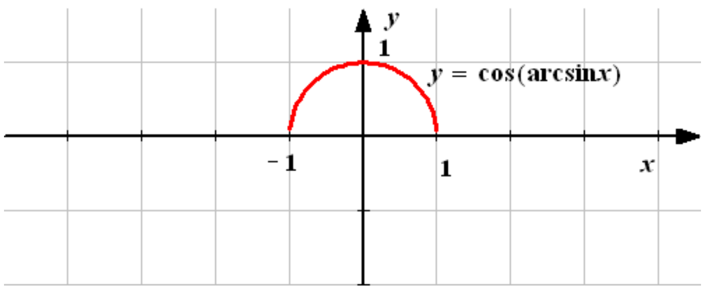
Рассмотрим некоторые графики функций.

а) y = sin(arcsin x) , y = cos(arccos x)



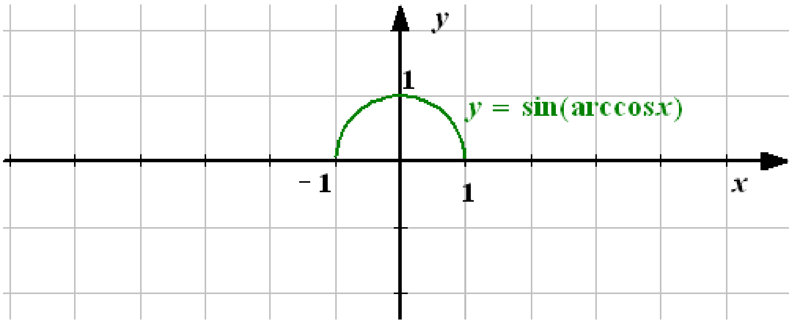


б) y =cos(arcsin x) , y = sin(arcos x)



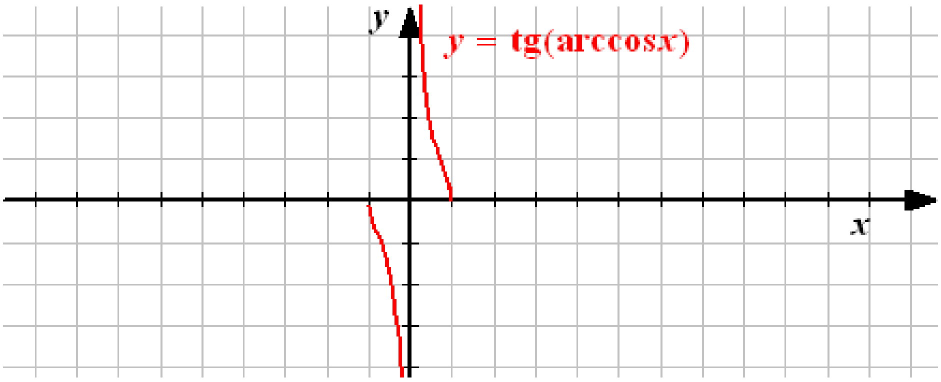
y=cos (arcsin x) = $\sqrt{1 - x^2}$

Конференц-зал
электронный журнал
электронное средство массовой информации
ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

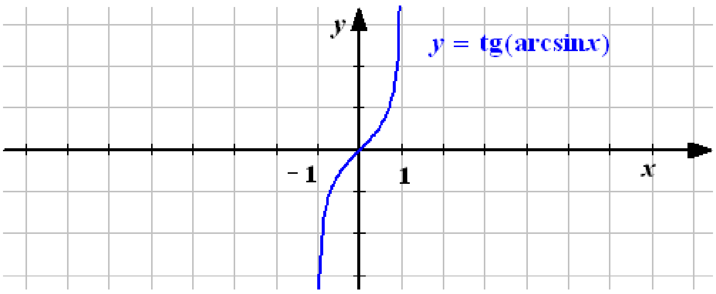


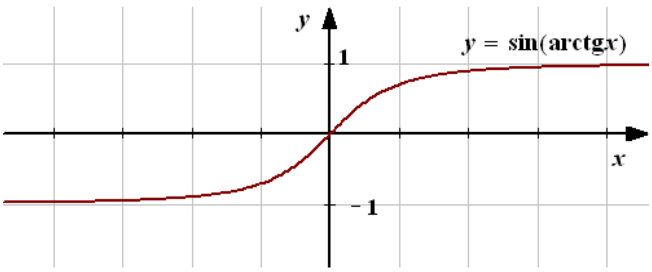
в) y = tg(arccos x) ,

tg (arccos x) = $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $1\text{-}x^2 \geq 0$, x≠ 0 , x∈ $[-1;0) \cup (0;1]$



y =tg (arcsin x). y = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ x≠ $1; x \neq -1$,





Занятие №4

Преобразований выражений, содержащих обратные тригонометрические функции

Цель. Научиться находить значения тригонометрических функций от значений обратных, повторить формулы приведения и применение их в новых выражениях, связанных с обратными тригонометрическими функциями. Рассмотреть решения уравнений и неравенств.

Устная работа. Вычислить.

а) $tg(arctg\,4)$;	4	г) $ctg(arcctg\,5)$;	5
б) $\sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$;	$\frac{12}{13}$	д) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
в) $\cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$;	$\frac{1}{4}$	е) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.	$\frac{4}{5}$

Объяснение решения sin (arccos $\frac{3}{5}$)

Вопросы учителя:	***Запись на доске и в тетради:***
Итак, нужно найти $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.	$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$
Что называется арккосинусом числа $\boldsymbol{\alpha}$?	*1) Пусть* $\arccos\frac{3}{5}=\alpha$, *тогда* $0\le\alpha\le\pi$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$.
Как найти $\sin\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$?	*2)* $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\lvert\sin\alpha\rvert=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$ $=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$.
Как определить знак $\sin\alpha$?	*3)* $0\le\alpha\le\pi$ *значит,* $\sin\alpha>0$, *т.е.* $\sin\alpha=\frac{4}{5}$. *Ответ:* $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{5}$.

1.Вычислить.

$cos(arcsin\frac{2}{3})$

1. Пусть $arcsin\frac{2}{3}=\alpha,\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\ sin\ \alpha=\frac{2}{3}.$

2. $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$

$$|cos\,\alpha|=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, то $cos\,\alpha>0$, т.е. $cos\,\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}.$

Ответ: $cos(arcsin\frac{2}{3})=\frac{\sqrt{5}}{3}.$

2.Вычислить.

$\cos(\arcsin\frac{5}{13})$

1. Пусть $arcsin\frac{5}{13}=\alpha,\ -\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2},\ sin\ \alpha=\frac{5}{13}.$

2. $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$

$$|cos\,\alpha|=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{12}{13}}=\frac{12}{13}.$$

3. т.к. $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, то $cos\,\alpha>0$, т.е. $cos\,\alpha=\frac{12}{13}.$

Ответ: $cos(arcsin\frac{5}{13})=\frac{12}{13}.$

3.Вычислить. $\sin(\arccos\frac{1}{3})$

1. Пусть $arccos\frac{1}{3}=\alpha,\ 0\le\alpha\le\pi,\ cos\,\alpha=\frac{1}{3}.$

2. $sin^2\alpha+cos^2\alpha=1$

$$|sin\,\alpha|=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

3. т.к. $0\le\alpha\le\pi$, то $sin\,\alpha>0$, т.е. $sin\,\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

Ответ: $sin(arccos\frac{1}{3})=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

4.Вычислить.

$$\cos(2\arcsin\frac{3}{5})$$

$$\cos(2\arcsin\frac{3}{5}) = 1 - 2\sin^2(\arcsin\frac{3}{5}) = 1 - 2\cdot\frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

5.Вычислить.

$$\sin(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$\sin(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}) =$$

$$= \sin(\arcsin\frac{4}{5})\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}) + \cos(\arcsin\frac{4}{5})\sin(\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}) =$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{10}{5\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

6.Решить уравнение.

а) $\cos(\arccos(x+2)) = x+2$

данное равенство верно, если

$|x+2| \le 1;$

$-1 \le x+2 \le 1;$

$-3 \le x \le -1.$

Ответ: $[-3;-1]$

б) $\sin(\arcsin(x-1)) = x^2 - 4x + 5$

$$\begin{cases} |x-1| \le 1, \\ x-1 = x^2 - 4x + 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x-1 \le 1, \\ x^2 - 5x + 6 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3; \\ x = 2; \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow (x = 2)$$

Ответ: 2

7.Упростить выражения.

Эти задания помогают учащимся повторить формулы приведения, увидеть их в совсем новых выражениях, связанных с обратными тригонометрическими функциями.

а)tg (1,5π+arctg 5) .

Решение. tg (1,5π+arctg 5) = - ctg (arctg 5) = - $\frac{1}{\text{tg(arctg5)}}$ = - $\frac{1}{5}$.

б) cos (π + arcsin 0,6) .

Решение. cos (π + arcsin 0,6) = - cos(arcsin 0.6) = - $\sqrt{1-0{,}36}$ =

= - 0,8.

в)sin (1,5π + arsin $\frac{5}{13}$). Ответ. - $\frac{12}{13}$

г) sin(arctg (- $\frac{1}{3}$) + $\frac{3\pi}{2}$).

Решение.

sin (arctg (- $\frac{1}{3}$) + $\frac{3\pi}{2}$) = - cos (arctg (- $\frac{1}{3}$)) = - cos (- arctg $\frac{1}{3}$) =-cos (arctg $\frac{1}{3}$)

Обозначим arctg $\frac{1}{3} = \alpha$, $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. tg $\alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} > 0$, $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$.

Найдем cos α, используя тождество

$$\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + \mathrm{tg}^2\, a:$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{9}}}.$$

$$-\cos a = -\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

д) (arcctg$(-\frac{1}{4})$ - $\frac{5\pi}{2}$).

Решение.

sin (arcctg $(-\frac{1}{4})$ - $\frac{5\pi}{2}$) = - sin (arcctg (- $\frac{1}{4}$) + $\frac{5\pi}{2}$) = sin ($\frac{\pi}{2}$ - arcctg $\frac{1}{4}$) =

= cos (arcctg $\frac{1}{4}$)

Обозначим arcctg $\frac{1}{4} = a$, $a \in (0; \pi)$;

$$\mathrm{ctg}\, a = \frac{1}{4} > 0,\ a \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right);\ \mathrm{tg}\, a = 4;$$

$$\cos a = \sqrt{\frac{1}{1+16}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Значит, $\cos\left(\mathrm{arcctg}\,\frac{1}{4}\right) = \cos a = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{17}}{17}$.

8. Вычислите. cos (arcsin $\frac{4}{5}$ + arcsin $\frac{5}{13}$ +arcsin $\frac{16}{65}$)

Решение. Положим, arcsin $\frac{4}{5} = \alpha$, arcsin $\frac{5}{13} = \beta$, arcsin $\frac{16}{65} = \gamma$ и отметим, что углы α, β, γ находятся в промежутке $(0; \frac{\pi}{2})$.

Тогда $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, $\sin\gamma = \frac{16}{65}$.

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$,

$\cos\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2} = \frac{63}{65}$. Таким образом,

$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma =$

$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\cos\gamma$ - $(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\sin\gamma =$

$= (\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13})\cdot\frac{63}{65} - \left(\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13} + \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}\right)\cdot\frac{16}{65} = 0$

Ответ. 0

9. Вычислить. cos (arctg 5 – arccos 0,8).

cos (arctg 5 – arcos 0,8) = cos (arctg 5) cos (arcos 0,8) +

+ sin(arctg 5)sin(arcos 0,8) = $0{,}8\sqrt{\frac{1}{1+5^2}} + 0{,}6\sqrt{1-\frac{1}{1+5^2}} = 0{,}8\sqrt{\frac{1}{26}} + 0{,}6\sqrt{1-\frac{1}{1+5^2}} =$

$0{,}8\sqrt{\frac{1}{26}} + 0{,}6\sqrt{\frac{25}{26}} = 3{,}8\sqrt{\frac{1}{26}}$.

10.Вычислите ctg $\left(arctg\frac{1}{3} + arctg\frac{1}{4} + arctg\frac{2}{9}\right)$.

Решение. Положим $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \beta$, $\operatorname{arctg}\frac{2}{9} = \gamma$

и преобразуем $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)$:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma} =$$

$$= \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}.$$

По определению арктангенса имеем: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{9}$. Подставив эти значения, получим, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma) = 1.$$

Ответ: 1.

11. Вычисли cos (arc sin (-$\frac{1}{3}$)).

Решение. $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$, то получим $\cos(\arcsin(-\frac{1}{3})) =$

$\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3} \in [-1;1]$

12. Вычисли $\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13})$.

Решение: используя формулу $\sin(\alpha + \beta)$ получим

$\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}) = \sin(\arcsin\frac{5}{13}) \cdot \cos(\arcsin\frac{12}{13}) +$

$+ \cos(\arcsin\frac{5}{13}) \cdot \sin(\arcsin\frac{12}{13}) = \frac{5}{13} \cdot \sqrt{1-\frac{144}{169}} + \sqrt{1-\frac{25}{169}} \cdot \frac{12}{13} = 1$

Представить $\arcsin\frac{4}{5}$ в виде arccos t.

Решение: обозначим $\arcsin\frac{4}{5} = t$, где $t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$,тогда $\sin t = \frac{4}{5}$

$\cos t = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$, так как, $t \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, то $\cos t = \frac{3}{5}$, тогда

$\arcsin\frac{4}{5} = \arccos\frac{3}{5}$.

Доказать, что arc tg 1 + arc tg 2 + arc tg 3 = π

Доказательство: arc tg 2 + arc tg 3 = π - arc tg 1

arc tg 2 + arc tg 3 = $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.возьмем от обеих частей “tg”

tg (arc tg 2 + arc tg 3) = tg $\frac{3\pi}{4}$;

$\frac{\text{tg}(\text{arc tg } 2) + \text{tg}(\text{arctg } 3)}{1 - \text{tg}(\text{arc tg } 2) \cdot \text{tg}(\text{arc tg } 2} = -1$ $\frac{2+3}{1-2\cdot3} = -1$

-1 = - 1, равенство верно.

13. Решить уравнение.

$\arccos x - \pi = \arcsin\frac{4x}{3}$.

Решение: Найдем область определения.

$\begin{cases} -1 \le \frac{4x}{3} \le 1, \\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{3}{4} \le x \le \frac{3}{4}, \\ -1 \le x \le 1. \end{cases}$ $\Rightarrow x \in [-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}]$

Возьмем от обеих частей синус.

sin (arc cos x – π) = sin (arc sin $\frac{4x}{3}$),

-sin ($\pi -$ arc cos x) = $\frac{4x}{3}$,

sin (arc cos x) = - $\frac{4x}{3}$, зная .что sin (arc cos x) = $\sqrt{1-x^2}$, получим

$\sqrt{1-x^2} = \frac{4x}{3}$, решаем иррациональное уравнение:

$\begin{cases} -\frac{4x}{3} \ge 0, \\ 1 - x^2 = \frac{16x^2}{9}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 0, \\ 25x^2 = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 0, \\ x = \pm\frac{3}{5} \end{cases}$ $\Rightarrow$ x = - $\frac{3}{5}$

- $\mathbf{\frac{3}{5} \in [-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}]}$

Ответ: - 0, 6

14. В этом ключе логичным и оригинальным представляется решение следующего уравнения: arcsin(x – 1) = arccos x (1)

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin(x-1) \le \frac{\pi}{2}$$

Решение: По определению арксинуса, а по определению арккосинуса 0 $\le$ arccos x $\le$ π. Значит, равные значения обе части уравнения (1) могут принимать на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$. Возьмём синусы от обеих частей этого уравнения: sin (arcsin(x – 1)) = sin(arccos x). Используя соответствующие формулы, перейдём к уравнению

$$x - 1 = \sqrt{1-x^2} \quad (2)$$

Решим его:

$x^2 - 2x + 1 = 1 - x^2$

$2x^2 - 2x = 0$

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$

Значение $x_1 = 0$ не удовлетворяет иррациональному уравнению (2), а значение $x_2 = 1$ удовлетворяет и уравнению (2), и уравнению (1). Таким образом, x = 1 – корень исходного уравнения (1).

Ответ: 1.

Решение неравенств, содержащих аркфункции.

1. Решить неравенство.

   arcsin x > $\frac{\pi}{6}$ x ∈ [-1;1]

   Решение: Так как y = sin t - возрастающая функция, то

   sin (acrsin x) > sin $\frac{\pi}{6}$

   x > $\frac{1}{2}$;

   $\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x > \frac{1}{2}. \end{cases}$ ⇒ x ∈ ($\frac{1}{2}$; 1].

   Ответ: ($\frac{1}{2}$; 1].

2. Решить неравенство.

   arc cos x ≤ arc cos $\frac{1}{4}$, x ∈ [-1; 1]

   Решение:

   Так как функция y = cos x - убывающая, то

   cos (arcos x) ≥ cos (arc cos $\frac{1}{4}$);

   x ≥ $\frac{1}{4}$

   $\begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ x \ge \frac{1}{4}. \end{cases}$ ⇒ x ∈ [$\frac{1}{4}$; 1].

   Ответ: [$\frac{1}{4}$;1].

3. Решить неравенство.

   arc sin x < arc cos x, x ∈ [-1; 1]

   Решение: Так как y = sin x возрастающая функция, то

   sin (arc sin x) < sin (arc cos x);

   x < $\sqrt{1-x^2}$.

   Решаем иррациональное уравнение. Рассмотрим два случая.

   а) $\begin{cases} -1 \le x < 0, \\ \sqrt{1-x^2} > x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ \sqrt{1-x^2} > x \end{cases}$

x∈ $[-1; 0)$ $\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 1-x^2 > x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2x^2 < 1 \end{cases}$;

Конференц-зал
электронный журнал
электронное средство массовой информации
ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \in [0; \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Ответ: $[-1; \frac{1}{\sqrt{2}})$.

4. Решить неравенство.

arc ctg x^2 - arc ctg x + 6 > 0 $\qquad x \in R$

Решение: Обозначим arc ctg x = t, $\qquad t \in (0; \pi)$.

$t^2 - 5t + 6 > 0$,

$y = t^2 - 5t + 6$,

$t^2 - 5t + 6 = 0$.

$t_1 = 2$, $\qquad t_2 = 3$

$$\begin{cases} t \in (-\infty; 2) \cup (3; \infty), \\ t \in (0; \pi). \end{cases}$$

$0 < t < 2$, $\qquad 3 < t < \pi$,

$0 <$ arc ctg x $< \infty$ $\qquad 3 <$ arc ctg x $< \pi$:

y = ctg x - убывающая,

ctg 2 < x < ∞ $\qquad$ - ∞ < x < ctg 3 .

Ответ: (- ∞; ctg 3) ∪ (ctg 2; ∞).

5. Решить неравенство.

а) 4 arc sin 3x – π < 0;

б) arc cos (2x – 1) $<$ arc cos 0,4.

Дополнительные задания для самостоятельной работы.

№ 1. Вычислите: $8\mathrm{ctg}(\arccos(-\frac{15}{17}))$

Ответ: а) 15; б) $\frac{8}{17}$; в) -15; г) $-\frac{15}{17}$

№ 2. Вычислите: $\frac{19}{13}\cos(2\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4})$

Ответ: а) -1; б)1,5; в) 1; г) $\frac{13}{19}$

№ 3. Вычислите: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}tg\frac{2\pi}{3}\cos(\frac{1}{2}arctg\frac{4}{3})$

Ответ: а) -2; б) $\frac{9}{25}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; г) $\frac{4}{3}$

№ 4. Вычислите: $\cos(2arctg\frac{1}{2})$

Ответ: а) 0,75; б)0,6; в) 0,8; г)-0,6

№ 5. Вычислите: $\cos(\mathrm{arcctg}(-\frac{4}{3}))$

Ответ: а) 0,75; б)0,8; в) -0,75; г) -0,8

№ 6. Вычислите: $\frac{3\sqrt{5}}{10}\sin(2\mathrm{arctg}\sqrt{5})$

Ответ: а) $\frac{\sqrt{5}}{3}$; б) 0,5; в) $\sqrt{5}$; г) -0,5

№ 7. Вычислите: $\frac{77}{3}\cos(2\mathrm{arctg}(2\sqrt{19}))$

Ответ: а) -25; б) $-\frac{75}{77}$; в) 25; г) $2\sqrt{19}$

№ 8. Вычислите: $\frac{4}{31}\cos(2\mathrm{arctg}(3\sqrt{7}))$

Ответ: а) $-3\sqrt{7}$; б) $3\sqrt{7}$; в) -0,125; г) 0,125

№ 9. Вычислите: $6\sin(\frac{\pi}{2}+\mathrm{arctg}(2\sqrt{2}))$

Ответ: а) $2\sqrt{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 2; г) $-2\sqrt{2}$

№ 10. Вычислите: $11\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}2-\arccos\frac{12}{13})$

Ответ: а) 9,5; б)-9,5; в) $\frac{5}{12}$; г) 2

№ 11. Вычислите: $\frac{4}{\sqrt{31}}\sin(2\mathrm{arctg}\sqrt{31})$

Ответ: а) 0,25; б) $\sqrt{31}$; в) $-\sqrt{31}$; г) -0,25

№ 12. Вычислите: $13\cos(2\mathrm{arcctg}5)$

Ответ: а) 5; б)-0,2; в) 1,2; г) 12

№ 13. Вычислите: $7\mathrm{tg}(2\arccos\frac{4}{5})$

Ответ: а) 0,75; б)-24; в) 0,8; г) 24

№ 14. Вычислите: $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{4}\sin(\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt{5}}{2})$

Ответ: а) 0,5; б)-0,5; в) $\frac{2}{3}$; г) 2,25

№ 15. Вычислите: $\sqrt{7}\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}\sin(\frac{1}{2}arctg\sqrt{48})$

Ответ: а) $\frac{1}{7}$; б)1; в) $\frac{3}{7}$; г) -1

№ 16. Вычислите: $\frac{2}{\sqrt{10}}\sin(\frac{1}{2}arctg\frac{3}{4})$

Ответ: а) -0,8; б) 0,8; в) 0,2; г) -0,2

№ 17. Вычислите: $\sqrt{3}\sin\ (\frac{1}{2}\text{arctg}(-\sqrt{8}))$

Ответ: а) 1; б) $-\sqrt{3}$; в) $\sqrt{8}$; г) -1

№ 18. Вычислите: $\cos(\frac{\pi}{2}+\text{arcctg}(2\sqrt{6}))$

Ответ: а) $2\sqrt{6}$; б) $-\sqrt{6}$; в) 0,2; г) -0,2

№ 19. Вычислите: $\sqrt{5}\sin\frac{5\pi}{4}\cos(\frac{1}{2}arctg\sqrt{15})$

Ответ: а) $\sqrt{15}$; б)0,25; в) -1,25; г) 1,25

№ 20. Вычислите: $19\sqrt{3}\sin\ (2\text{arctg}(5\sqrt{3}))$

Ответ: а) $\sqrt{3}$; б) 7,5; в) $5\sqrt{3}$; г) -7,5

№ 21. Вычислите: $\frac{\sqrt{7}}{7}\sin(2arctg\sqrt{7})$

Ответ: а) -0,25; б) 0,7; в) $\sqrt{7}$; г) 0,25

№ 22. Вычислите: $7\sqrt{3}\sin(arctg(4\sqrt{3}))$

Ответ: а) $7\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3}$; в) 12; г) -12

№ 23. Вычислите: sin(2arcctg3)

Ответ: а) -0,6; б) 0,6; в) -0,9; г) 3

№ 24. Вычислите: $9\text{ctg}(\arccos(-\frac{40}{41}))$

Ответ: а) 40; б) $\frac{40}{9}$; в) -40; г) $\frac{9}{40}$

№ 25. Вычислите: $\cos(\frac{3\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5})$

Ответ: а) -0,6; б) 0,6; в) 0,8; г) -0,8

№ 26. Вычислите: $\text{tg}(2\text{arcctg}\frac{2}{3})$

Ответ: а) 1,5; б) 2,4; в) -1,5; г) -2,4

№ 27. Вычислите: $\sqrt{35}\cos(\frac{1}{2}arctg\frac{\sqrt{40}}{3})$

Ответ: а) $\frac{3}{7}$; б) 5; в) $\sqrt{35}$; г) -5

№ 28. Вычислите: $\cos(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{3}{5})$

Ответ: а) 0,28; б) 0,6; в) -0,6; г) -0,28

№ 29. Вычислите: $\sqrt{3}\,\text{tg}(2\text{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{2})$

Ответ: а) -12; б) $\sqrt{3}$; в) $-4\sqrt{3}$; г) $-\sqrt{3}$

№ 30. Вычислите: $\text{ctg}(\arccos(-\frac{3}{5}))$

Ответ: а) -0,6; б) –0,75; в) 0,6; г) 0,75

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

Таблица ответов:

№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7	№ 8	№ 9	№ 10	№ 11	№ 12	№ 13	№ 14	№ 15
в	в	а	б	г	б	а	в	в	а	а	г	г	а	б
№ 16	№ 17	№ 18	№ 19	№ 20	№ 21	№ 22	№ 23	№ 24	№ 25	№ 26	№ 27	№ 28	№ 29	№ 30
в	г	г	в	б	г	в	б	в	а	г	б	г	а	б

Занятие № 5

Вычисление значений выражений, записанных в виде суммы (разности) обратных тригонометрических функций.

Цель. Показать наглядный способ вычисления обратных тригонометрических выражений с помощью построения углов.

Вычисление значений выражений, записанных в виде суммы (разности) обратных тригонометрических функций, нередко оказывается для учащихся нелегкой задачей.

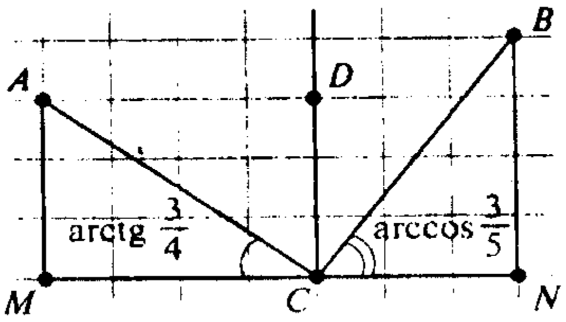
В Древней Индии в математических трактатах, доказывая теорему или решая задачу, часто приводили только рисунок, сопровождая его только одним словом «Смотри». Наглядность часто убеждает сильнее логических выкладок. Однако требуется немалая изобретательность, чтобы найти наглядную картинку. Покажем это на решении ряда задач.

Задача №1. Вычислить значение выражения

$$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\arccos\frac{3}{5}\right)$$

Решение. Если при вычислениях учащиеся будут обращаться к формулам, то решение потребует значительных усилий. Эти неудобства можно избежать, если делать рисунки на бумаге в клетку. Изобразим один угол, у которого косинус угла равен $\frac{3}{5}$, и другой угол, тангенс угла равен $\frac{3}{4}$. Для этого построим два прямоугольных треугольника с длинами катетов 3 и 4. Расположим их так, чтобы больший катет одного треугольника и меньший катет другого лежали на одной прямой. Тогда их гипотенузы будут перпендикулярны, поскольку сумма этих углов равна 90^0.Построим $\angle ACD$, так чтобы $\angle ACD = \angle BCN = arccos\frac{3}{5}$.

Аналогично $\angle BCD = \angle ACM = arctg\frac{3}{4}$, но $\angle ACM + \angle ACD = 90^0$.



(рис.1)

Значит , $\text{arctg}\,\frac{3}{4} + \text{arccos}\,\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$, и $\sin\left(\text{arctg}\frac{3}{4} + \text{arccos}\frac{3}{5}\right) = 1$.

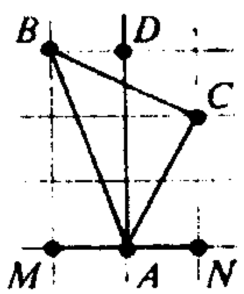
Задача 2. Вычислить cos (arcctg 3 + arctg 0,5).

Решение. На бумаге в клетку построим треугольник ABC. При этом

ctg $\angle DAB = 3$ и tg$\angle DAC$ = 0,5.

Треугольник ABC – равнобедренный с прямым углом ACB . Значит

arcctg 3 + arctg 0,5 = $\frac{\pi}{4}$, а cos (arcctg 3 + arctg 0,5) = $\frac{\sqrt{2}}{2}$



(рис.2)

Задача 3. Вычислить значение выражения.

$$\text{tg}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

Решение. Так как $\frac{2}{\sqrt{5}} > 0$, то можно считать, что arcsin $\frac{2}{\sqrt{5}}$ это угол прямоугольного треугольника, у которого отношение катетов равно 1:2.

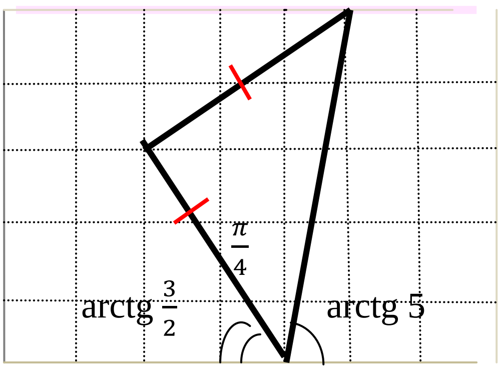
Тогда величину этого угла можно рассматривать arctg 2. Аналогично рассуждая $\frac{1}{\sqrt{10}} > 0$, то. $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$ это угол прямоугольного треугольника, у которого отношение катетов 1:3. Тогда $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$ = arctg 3. Далее по рис.2 $\angle MAB = \operatorname{arctg} 3$ и $\angle NAC = \operatorname{arctg} 2$, а их сумма равна $\pi - \frac{\pi}{4}$.

Итак, $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ = tg $(\pi - \frac{\pi}{4})$ = -1.

Похожими приемами достаточно быстро находятся значения выражений:

4. arctg 5 + arctg $\frac{3}{2}$;

Решение.

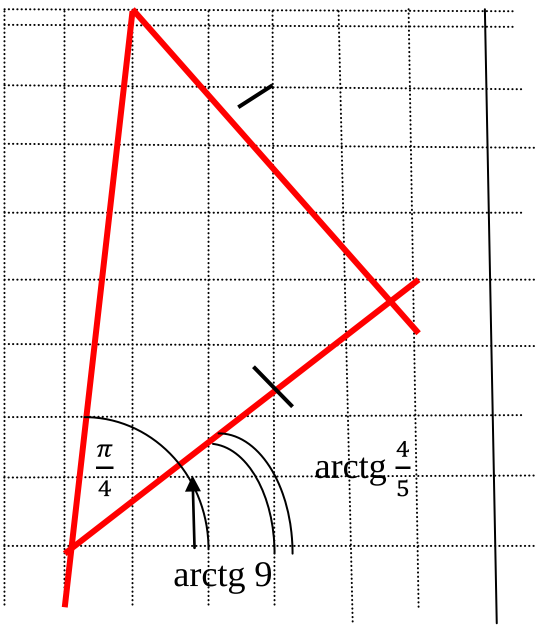


Ответ: $\frac{3\pi}{4}$

5) arctg 7 + arctg $\frac{4}{3}$;

Ответ: $\frac{3\pi}{4}$

6) $arctg\ 9 - arctg\ \frac{4}{5}$



Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Занятие №6

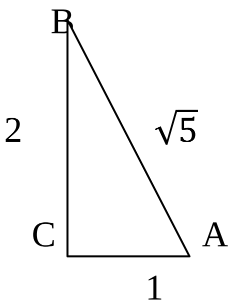
Геометрический подход к вычислению значений обратных тригонометрических выражений.

Цель. Показать различные подходы к вычислению значений обратных тригонометрических выражений.

Все значения обратных тригонометрических функций от положительных чисел – это острые углы, поэтому можно воспользоваться прямоугольным треугольником и теоремой Пифагора. Применим это к нашему заданию.

1. Найти значение выражения $3\sqrt{5}$ arcsin(arcctg $\frac{1}{2}$).

Решение. Построим треугольник с катетами 1 и 2.



$\angle A$ = arcctg $\frac{1}{2}$ - это угол треугольника, по теореме Пифагора AB= $\sqrt{5}$.

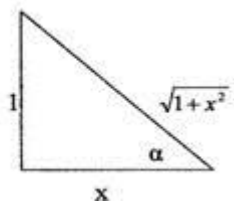
sin $\angle A$ = sin(arcctg $\frac{1}{2}$) = $\frac{2}{\sqrt{5}}$ Итак

$3\sqrt{5}$ arcsin (arcctg $\frac{1}{2}$) = $3\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$ = 6

Ответ: 6.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

И вообще, если обозначить arcctgx = α , тогда ctg α = x. В прямоугольном треугольнике можно принять катет, прилежащий к углу α, равным x, а противолежащий – равным 1. По теореме Пифагора найдём гипотенузу. Она равна $\sqrt{1+x^2}$.



По определению синуса острого угла прямоугольного треугольника получим: $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; т. е.

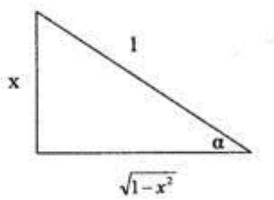
Рис. 2 sin(arcctgx) = $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Применим эту формулу к нашему выражению:

$3\sqrt{5}\sin(\text{arc ctg}\,\frac{1}{2}) = 3\sqrt{5}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = 3\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 6.$

Аналогично можно получить значения любых тригонометрических функций от арккотангенса: cos(arcctg x) = $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; tg(arcctg x) = $\frac{1}{x}$; ctg(arcctgx) = x.

Рис.3

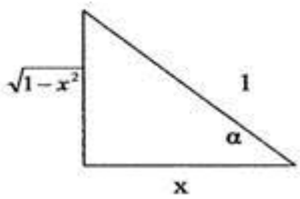


Используя данный подход и рис. 3 можно вывести и такие формулы:

cos(arcsin x) = $\sqrt{1-x^2}$; tg(arcsin x) = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;

ctg(arcsin x) = $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; sin(arcsin x) = x.

Рис.4



Используя рис.4 получим следующие формулы:

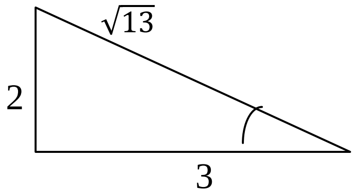
cos(arccos x) = x ;

tg(arccos x) = $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$;

ctg (arcos x) = $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; sin (arcos x) = $\sqrt{1-x^2}$.

Найти значение выражения $2\sqrt{13}\cos(\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3})$.

Решение: Построим прямоугольный треугольник с катетами 2 и 3 и покажем дугой угол $\operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{3}$

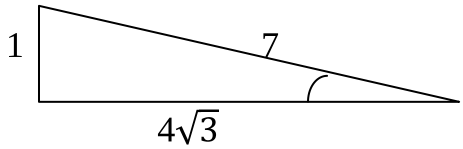


Теперь можно находить значение любой тригонометрической функции от этого угла $\operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{3}$: $\cos(\operatorname{arc\,ctg}\frac{2}{3}) = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow 2\sqrt{13}\cos(\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{3}) = 6$.

Ответ: 6.

Найти **а) $\mathbf{tg(arc\,sin\,\frac{1}{7})}$**

Решение: Поданному углу $\arcsin\frac{1}{7}$, построим, прямоугольный треугольник с катетом 1 и гипотенузой 7.

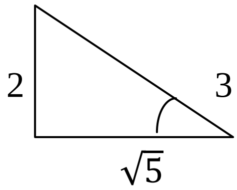


Находим значение нужных тригонометрических функций

$\operatorname{tg}(\arcsin\frac{1}{7}) = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

б) $\mathbf{tg(2\,arc\,sin\,\frac{2}{3})}$

Решение: Поданному углу $\arcsin\frac{2}{3}$, построим, прямоугольный треугольник с катетам 2 и гипотенузой 3.



$$\text{tg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right) = \frac{2\arcsin\frac{2}{3}}{1-\text{tg}^2(\arcsin\frac{2}{3})} = \frac{2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}}{1-\frac{4}{5}} = 4\sqrt{5}.$$

Дополнительные задания.

Вычислить.

а) $\text{arctg}\, 3 - \text{arctg}\,\frac{1}{2}$;

б) $\text{arctg}\, 11 + \text{arctg}\,\frac{6}{5}\,(\frac{3\pi}{4})$.

Занятие №7.

Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями.

Цель: сформировать представление учащихся об обратных тригонометрических операциях над тригонометрическими функциями.

Материал для занятий:

I. Изучение нового материала можно начать с исследования функции

y = arcsin (sin x) и построения ее графика.

1. ОДЗ: R

2. E(y): $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

3. Функция периодическая с периодом 2π , так как arcsin (sinx) = arcsin [sin(x+2π)].

4. Функция нечетна: sin (-x) = - sin x; arcsin (sin (-x)) = arcsin (-sin x) = -arcsin(sinx) , поэтому достаточно построить в начале график функции для половины периода.

Каждому x ∈ R ставится в соответствие y , $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ такое, что sin y = sinx.

5. График y = arcsin (sin x) на [0; π]:

а) $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ имеем y = arcsin (sin x) = x, т.е. график представляет собой отрезок прямой y = x, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

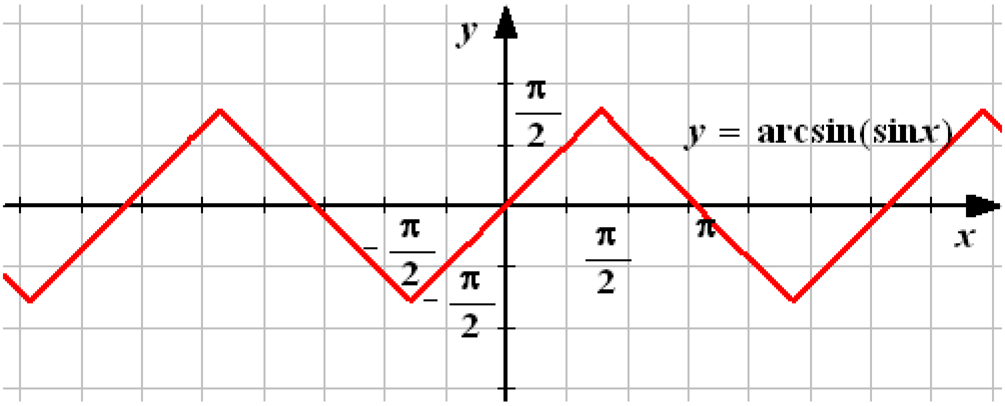
б) $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ получим y = arcsin (sin x) = arcsin[sin (π - x)] = π- x, получаем уравнение прямой y = $\pi - x$, которую можно построить по двум точкам

при x = $\frac{\pi}{2}$ y = $\frac{\pi}{2}$,

при x = π y = 0.

y =arcsin (sin x) = $\begin{cases} x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$

Построим график функции на промежутке [0; π] , построим симметрично относительно начало координат. Используя периодичность, продолжим на всю числовую ось.



Выполняются тожества.

arcsin (sin x) = x, где - $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

arccos (cos x) = x, где 0 ≤ x ≤ π .

arctg (tg x) = x, где - $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

arcctg (ctg x) = x, где 0 < x < π.

II. ***Построим график функции y = arccos (cos x)***.

Согласно определению арккосинуса, имеем cosy = cos x , где 0<y< π

1. ОДЗ: R

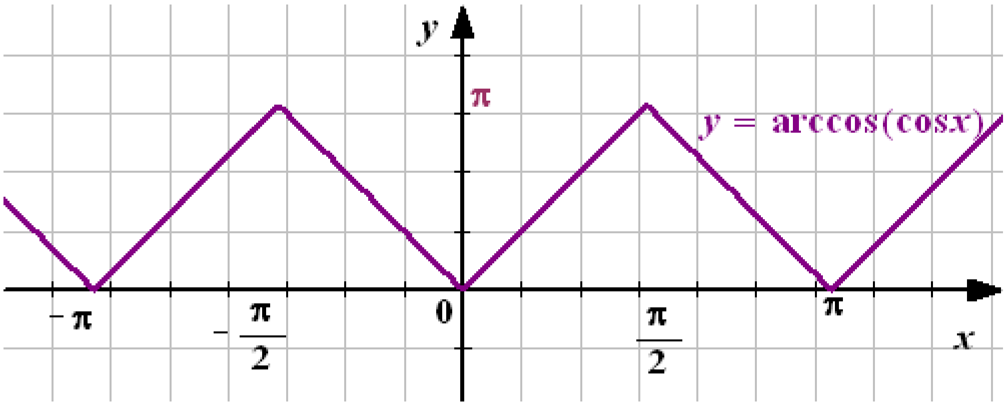
2. E(y): [0; π]

3. Функция периодическая с периодом 2π , так как arcos (cosx) = arccos [cos(x+2π)].

4.Четная, так как arcos (cos (-x)) = arcos (cos x).

Для полупериода [0; π] функция имеет вид y = x, графиком является отрезок прямой y = x, где 0 ≤ y≤ π.

Для второго полупериода [- π; 0] , графиком является отрезок, симметричный первому относительно оси ОУ. Остальная часть графика строится как для периодической функции.



III. Построим график функции y = arctg (tg x).

1. D(y) = $\left(-\frac{\pi}{2}n; \frac{\pi}{2}n\right)$, где n ϵ N

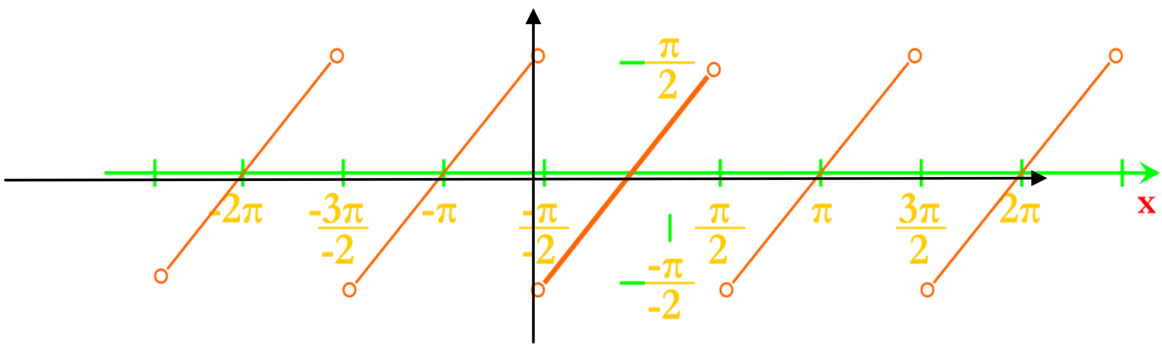
2. E(y) = $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

3. Функция периодическая с периодом π

arctg (tg x) = arctg (tg (x+π)).

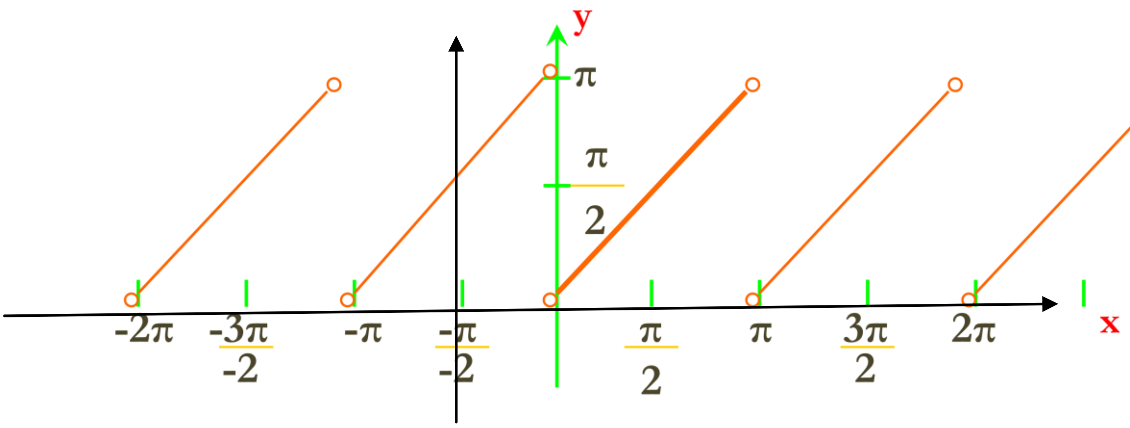
4. Нечетная.

График удобнее построить на полном периоде $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, для которого arctg(tg x) = x; получаем прямую y = x на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. без включения крайних точек. Остальная часть графика строится, как для периодической функции.



IV. Построим график функции y = arcctg (ctg x).

График строится аналогично.



V. Вычислите.

1. arcsin(cos 3)

Решение. Обозначим cos 3 = x, тогда arccos x = 3, 3∈[0;π].

arcsin x+ arccos x = $\frac{\pi}{2}$; arcsin x = $\frac{\pi}{2}$ - arccos x,

arcsin x = $\frac{\pi}{2} - 3$, следовательно arcsin (cos 3) = $\frac{\pi}{2}$ - 3

Ответ: $\frac{\pi}{2}$ - 3.

2. arccos(sin 5)

Решение.

arccos (sin 5) = arccos (- sin (2 π-5)) = π - arccos (sin (2 π-5))

Обозначим sin(2 π-5) = y , arcsin y = 2 π - 5, 2π - 5 ∈ [- $\frac{\pi}{2}$;$\frac{\pi}{2}$];

arccos y + arcsin y = $\frac{\pi}{2}$;

arccos y = $\frac{\pi}{2}$ - arcsin y;

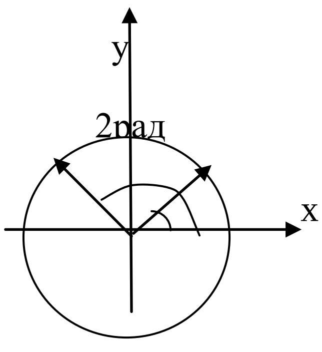
arccos y = $\frac{\pi}{2}$ - (2 π-5) = 5- $\frac{3\pi}{2}$.

3. arcsin (sin 2).

Решение: arcsin(sin 2) $\neq 2$, так как 2 ∉[- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$]? обозначим

arcsin (sin 2) = t, t ∈ [- $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$], тогда sin t = sin 2.

Рассмотрим на тригонометрическом круге.



Угол в 2 радиан находится во II четверти, а угол t в t радиан в I четверти, то равенство sin t= sin 2, справедливо при t = π- 2.

Ответ: π- 2.

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

4.Выполнить следующие упражнения.

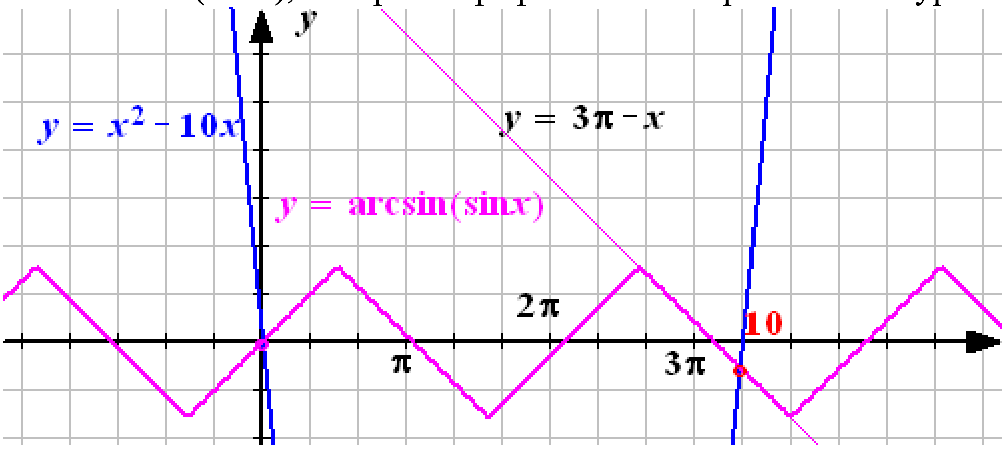
а) arccos (sin 2) . Ответ. 2- $\frac{\pi}{2}$

б) arcsin (cos 0,6). Ответ. - 0,1 π

5.Решить уравнение x^2 = arc sin(sin x) + 10x.

Решение.

x^2-10x = arc sin (sin x), построим график левой и правой части уравнения.



Точки пересечения находим на участках -$\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ и $\frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$ и находим из уравнений x = x^2-10x, x = 0, $0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$$3\pi\text{-}x = x^2 - 10x.$$
$$x^2 - 10x + x - 3\pi = 0,$$
$$x^2 - 9x - 3\pi = 0,$$
$$x = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{81 + 12\pi}),$$

$\frac{1}{2}(9 + \sqrt{81 + 12\pi}) \in [\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}]$

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}(9 + \sqrt{81 + 12\pi})$.

6.Решить уравнение arc cos (cos x) = x^2 + 10x

Ответ: $x_1 = 0$. $x_2 = -\frac{1}{2}\ (9 + \sqrt{81 + 16\pi})$

Занятие №8

Решение уравнений с параметрами.

1. Решить уравнение. При каких значениях параметра **а,** уравнение

arcsin (x^2- 4x +5) + arccos $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{a-3}{4} \cdot \pi$ имеет решение?

Решение: Найдем область определения уравнения:

$$\begin{cases} -1 \leq x^2 - 4x + 5 \leq 1, \\ -1 \leq \frac{x-1}{\sqrt{2}} \leq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 \leq 1, \\ x^2 - 4x + 5 \geq -1, \\ x - 1 \leq \sqrt{2}, \; x - 1 \geq -\sqrt{2}. \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

Значит arc sin 1 + arccos $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a-3}{4} \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{a-3}{4} \cdot \pi,$

$\frac{3\pi}{4} = \frac{a-3}{4} \cdot \pi \Rightarrow$ a = 6.

Ответ: при a =6 уравнение имеет единственное решение x = 2.

2.При каких значениях параметра a, число arcsin (-a) +ar cos a принадлежит промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

Решение: $\frac{\pi}{2} < \arcsin(-a) + \arccos a < \pi,$

$\frac{\pi}{2} < -\arcsin a + \frac{\pi}{2} - \arcsin a < \pi,$

$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin a < \pi,$

0 < -2 arc sin a < $\frac{\pi}{2}$. Так как y = arc sin x возрастает на [-1;1] , то из неравенства -$\frac{\pi}{4} < \arcsin a < 0,$ следует, что -$\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 0,$ то есть, $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

Ответ: $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$

3.Чему равно a, если arc sin(sin a) = $\frac{5\pi}{2}$ – a?

Решение. Область определения arc sin (sin x): -$\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{2} - a \leq \frac{\pi}{2}$.

$2\pi \leq a \leq 3\pi$

sin (arc sin (sin a) = sin ($\frac{5\pi}{2}$ – a);

sin a = cos a, a = $\frac{\pi}{4}$ +πn, где n∈ Z, так как a ≥ 2π, то

a = $\frac{\pi}{4}$ + $2\pi n$, a = $2\frac{1}{4}\pi$.

Ответ: $2\frac{1}{4}\pi$.