Маховер Михаил Сергеевич

Государственное бюджетное образовательное учреждение «Гимназия №11»

Василеостровского района Санкт-Петербурга

Жувикина Ирина Алексеевна

Государственное бюджетное образовательное учреждение

средняя школа №352

Красносельского района Санкт-Петербурга

УРОК ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРОМ

Задания № 18 профильного ЕГЭ по математике, связанные с решением задач, содержащих параметр, всегда вызывают большие сложности у учащихся. Это связано, во-первых, с тем, что, в отличие от остальных заданий (кроме, частично, задания № 19) задание № 18 не «привязано» ни какой отдельной теме изученного курса средней школы. Любая тема школьной математики может порождать содержательные задачи, включающие параметры. В повседневной школьной практике такие задачи оказываются вне внимания учащихся, за исключением выпускников физико-математических школ. Второй момент определяется тем, что решение заданий с параметром всегда носит исследовательский характер. Привычка к элементам исследовательской деятельности в обычных школах на уроках математики не вырабатывается, а, потому, выпускники, в основной массе, заранее отказываются от попыток решить задание с параметром.

Невозможно описать все методы и подходы к решению заданий с параметрами, поскольку они также многообразны, как и сами задания. Можно ставить вопрос о воспитании определенной математической культуры, которая, естественно, нарабатывается в процессе решения большого количества различных задач. В данной работе мы представляем один из приемов, который может быть применен при решении заданий с параметром. Он основан на исследовании свойств некоторой вспомогательной функции.

Для начала покажем, как работает данный метод на примере уравнения, не содержащего параметра.

Задача 1. Решить уравнение

$$x^8 + 97\cos(9+8x) = 97\cos(x^2) + (9+8x)^4.$$

Решение. В таком задании прежде всего следует внимательно изучить структуру предлагаемого уравнения, выделить характерные и повторяющиеся выражения. В данном уравнении можно заметить повторение выражений с аргументами $(9+8x)$ и x^2, а именно

$$(x^2)^4 - 97\cos(x^2) \text{ и } (9+8x)^4 - 97\cos(9+8x).$$

Воспользуемся замеченным обстоятельством и запишем уравнение в виде

$$f(t_1) = f(t_2), \qquad (1)$$

где $f(t) = t^4 - 97\cos t$ - вспомогательная функция, а $t_1 = x^2;\ t_2 = 9+8x$.

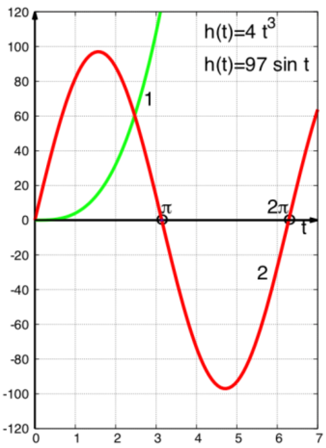

Рис. 1

Исследуем свойства вспомогательной функции $f(t) = t^4 - 97\cos t$. Прежде всего, замечаем, что данная функция является четной, а, значит, если равенство (1) выполняется при $t_1 = t_2$, то оно выполняется и при $t_1 = -t_2$. Поэтому дальше будем считать, что $t > 0$. Для определения свойства монотонности, возрастания-убывания возьмем производную от этой функции. Имеем

$f'(t) = 4t^3 + 97\sin t$. Легко видеть, что при $t \in [0; \pi]$ оба слагаемых в этой сумме неотрицательны, и, следовательно, неотрицательна вся сумма, см.рис.1. Покажем, что значения производной $f'(t) = 4t^3 + 97\sin t$ будут неотрицательной и при $t > \pi$. Действительно, $4t^3 > 124$, если $t > \pi$, а $97\sin t \geq -97$ при $\forall t$. Поэтому сумма этих слагаемых положительна и при $t > \pi$, а, значит производная функции $f(t)$ неотрицательна при всех неотрицательных значениях аргумента. Следовательно, сама функция $f(t) = t^4 - 97\cos t$ монотонно возрастает на всей положительной полуоси. А значит, равенство (1) может выполняться только при $t_1 = t_2$ и при $t_1 = -t_2$. Таким образом, задача определения корней исходного уравнения свелось к решению совокупности двух квадратных уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 = 9 + 8x \\ x^2 = -9 - 8x \end{array}\right.$$

Корнями первого из них являются $x = -1; x = 9$, а второго $x = -4 \pm \sqrt{7}$.

Ответ: -1; 9; $-4 - \sqrt{7}$; $-4 + \sqrt{7}$.

Теперь применим этот метод для решения уравнения, содержащего параметр.

Задача 2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin^{14}x + (a - 3\sin x)^7 + \sin^2 x + a = 3\sin x$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. После решения предыдущей задачи становится ясно, каким образом следует переписать данное уравнение, чтобы воспользоваться методом вспомогательной функции. Действительно, перепишем уравнение в виде

$$\sin^{14}x + \sin^2 x = (3\sin x - a)^7 + (3\sin x - a).$$

Следуя методу, изложенному в решении предыдущей задаче, получим

$$f(t_1) = f(t_2), \qquad (2)$$

где $f(t) = t^7 + t$ - вспомогательная функция, а $t_1 = \sin^2 x$; $t_2 = 3\sin x - a$. Функция $f(t) = t^7 + t$ монотонно возрастает при всех $t \in (-\infty; \infty)$, а, значит, разным значениям аргумента соответствуют разные значения этой функции, а одинаковым значениям аргумента – равные значения функции. Этим мы и воспользуемся. Тогда равенство (2) выполняется только при

$$\sin^2 x = 3\sin x - a.$$

Таким образом, мы получили квадратное уравнение относительно $\sin x$, содержащее параметр a. Нам необходимо найти все значения параметра, при которых уравнение будет иметь корень. Проще всего это выяснить с помощью графического метода. Перепишем уравнение еще раз

$$3\sin x - \sin^2 x = a. \qquad (3)$$

Положим $\sin x = y$. Построим график функции $z = g(y) = 3y - y^2$, см. рис.2.

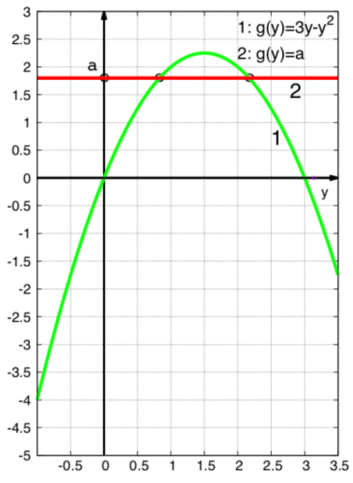

Рис. 2

Решения уравнения (3) даются точками пересечения этого графика с горизонтальной прямой $z = a$. График функции $g(y)$ представляет собой параболу, обращенную ветвями вниз, пересекающую горизонтальную ось в точках $y = 0$ и $y = 3$. Вершина параболы расположена посередине между этими точками, т.е. при $y_0 = 1{,}5$, ордината вершины параболы $z_0 = g(y_0) = 2{,}25$.

По смыслу введенной переменной y ясно, что функцию $g(y)$ следует рассматривать только на отрезке $y \in [-1; 1]$. Из графика видно, что при этих значениях аргумента функция $g(y)$ монотонно возрастает от значения -4 до значения 2. На всем этом интервале график функции $g(y)$ имеет одну точку пересечения с горизонтальной прямой $z = a$, а, значит, при всех $a \in [-4; 2]$ уравнение (3), а вместе с ним и исходное уравнение, имеет корень.

Ответ: $[-4; 2]$.

Задача 3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$8x^6 + (a - |x|)^3 + |x|\sqrt{2} - \sqrt{|x| - a} = 0$$

имеет более трех различных решений.

Решение. Внимательно изучив структуру данного уравнения, заметим, что его можно записать в следующем виде

$$\left(|x|\sqrt{2}\right)^6 + |x|\sqrt{2} = \left(\sqrt{|x| - a}\right)^6 + \sqrt{|x| - a}.$$

Пользуясь изложенным выше методом, введем в рассмотрение вспомогательную функцию $\phi(t) = t^6 + t$ и представим уравнение в виде

$$\phi(t_1) = \phi(t_2), \qquad (4)$$

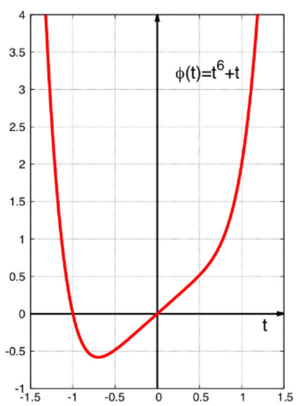

Рис. 3

где $t_1 = |x|\sqrt{2}$; $t_2 = \sqrt{|x| - a}$. Поскольку и модуль, и квадратный корень принимают только неотрицательные значения, то функция $\phi(t)$ задана только при неотрицательных значениях аргумента. На рис.3 показан график этой функции при всех значениях аргумента $t \in (-\infty; \infty)$. При $t \in [0; \infty)$ эта функция является монотонно возрастающей, а, значит, равенство (4) может выполняться только при $t_1 = t_2$, или $|x|\sqrt{2} = \sqrt{|x| - a}$. Поскольку обе части этого уравнения неотрицательны, то его можно возвестив квадрат. Положив $|x| = y$, получим относительно y квадратное уравнение

$$2y^2 - y + a = 0. \qquad (5)$$

Исходное уравнение будет иметь более трех корней, если уравнение (5) имеет два различных корня, причем, оба положительных. Тогда в соответствии с заменой $|x| = y$, каждому y будет соответствовать два значения x, а, значит, исходное уравнение будет иметь четыре корня.

Чтобы уравнение (5) имело два положительных корня необходимо, чтобы выполнялись два условия:

1. $D = 1 - 8a > 0$ – положительность дискриминанта квадратного уравнения;
2. $\frac{1 \pm \sqrt{1-8a}}{4} > 0$ - положительность обоих корней квадратного уравнения.

   Заметим, что если положительным будет корень уравнения, соответствующий знаку «минус», то корень, соответствующий знаку «плюс», будет тем более положительным. Поэтому приведенные два условия определяют следующую систему неравенств для определения значений параметра a:

$$\begin{cases} 1 - 8a > 0 \\ 1 - \sqrt{1 - 8a} > 0 \end{cases}.$$

Решением этой системы является промежуток $a \epsilon \left(0; \frac{1}{8}\right)$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right)$.

Авторы выражают благодарность учащимся 11б класса ГБОУ СОШ № 352 Красносельского района Санкт-Петербурга за активное участие в решении и обсуждении этих задач.