Сафонова Любовь Николаевна

Тираспольский общеобразовательный теоретический лицей

г. Тирасполь, Приднестровье

ПРИЛОЖЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ И ИССЛЕДОВАНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Исследовательская деятельность сегодня стала характерным видом работы не только во внеурочной деятельности, но и как форма проведения уроков и его этапов.

В геометрии исследование является необходимой составной частью решения задач на построение. Элементы исследования также присутствуют в задачах, в которых данных больше, чем нужно для решения. В них надо понять, без каких данных можно обойтись, и нет ли вообще между ними противоречия. Это также задачи, в которых данных меньше. Тогда для получения результата надо понять, какими данными можно дополнить условие задачи. Но есть и задачи, которые не имеют решения, как бы они ни были сформулированы. Обнаружить это – все равно, что решить задачу. А это тоже элемент исследования.

Я предлагаю к рассмотрению решение геометрических задач, требующих приложения тригонометрии с исследованием формул решения при разных значениях углового параметра и, в частности, при предельных значениях, влекущих за собой качественное изменение геометрического смысла формулы, изменения геометрических форм.

При исследовании решений многих стереометрических задач полезно знать следующие соотношения между углами в пространстве и их проекциями на плоскость.

1. Если из внешней точки на плоскость проекций проведены равные наклонные, то угол между ними меньше угла между их проекциями на плоскость.

2. Проекция острого угла, одна сторона которого (и только одна) параллельна плоскости проекций или лежит в ней, меньше самого угла.

3. Проекция тупого угла, одна (и только одна) сторона которого параллельна плоскости проекций или лежит в ней, больше самого угла.

4. Если хотя бы одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций или лежит в ней, то проекция прямого угла также прямой угол.

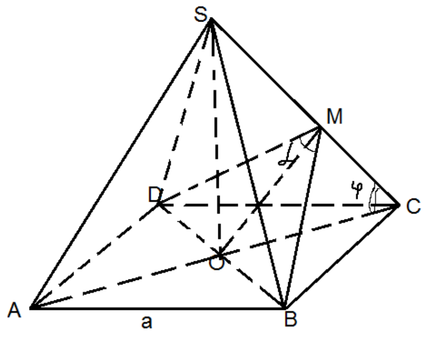
Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро составляет с плоскостью основания угол φ, сторона основания равна a. Найти: 1) площадь Q сечения, проведенного через диагональ основания перпендикулярно боковому ребру, 2) двугранный угол α между боковыми гранями.

Решение. 1) $Q = \frac{1}{2}a^2 \sin\varphi$ 2) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin\varphi}$.

Исследование.

Пусть a – постоянно. Границы изменения: $0 < \varphi < 90^0$; $0 < Q < \frac{a^2}{2}$.

При $\varphi \to 90^0$, $Q \to \frac{a^2}{2}$, $\alpha \to 90^0$.



Разберемся в этом геометрически. Квадрат в основании не изменяется. При $\varphi \to 90^0$ высота пирамиды и боковые ребра неограниченно удлиняются. Вершина сечения BMD (точка M) скользит по ребру SC, стремясь слиться с вершиной C, а треугольник BMD стремиться совпасть с треугольником BCD, $S_{BCD} = \frac{a^2}{2}$.

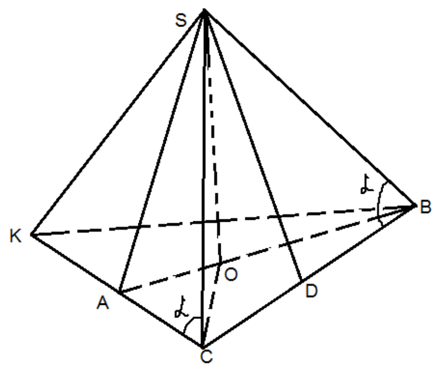
При $\varphi \to 0, \quad Q \to 0, \quad \alpha \to 180^0$; отрезок OM стремится слиться с высотой пирамиды, длина $OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}\sin\varphi \to 0$; пирамида «вырождается» в квадрат, угол α приближается к развернутому. Границы изменения α оказываются следующие: $90^0 < \alpha < 180^0$, т.е. угол α – тупой, что можно видеть и из формулы.

Задача 2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α. Найти площадь Q сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды.

Решение.

$$SB = \frac{a}{2\cos\alpha}; \quad OB = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad SO = \frac{a\sqrt{3-4\cos^2\alpha}}{2\sqrt{3}\cos\alpha}; \quad Q = \frac{a^2\sqrt{3-4\cos^2\alpha}}{12\cos\alpha}$$

Исследование. Пусть a – постоянно. По формуле находим: $30^0 < \alpha < 150^0$. Рассмотрение трехгранного угла C показывает, что $2\alpha > 60^0$ и $\alpha > 30^0$(сумма двух плоских углов всякого трехгранного угла больше третьего его плоского угла).

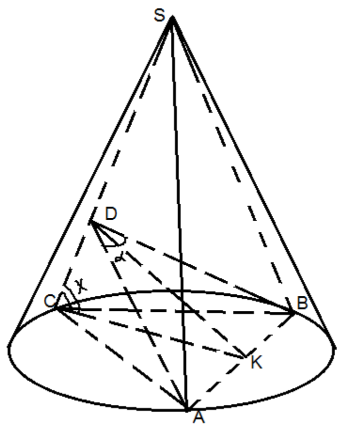


Верхняя граница α, однако, не 150^0, как позволяет заключить формула, а только 90^0; угол α – острый, как угол при основании равнобедренного треугольника. Итак, промежуток возможных значений α: $30^0 < \alpha < 90^0$. С увеличением угла α от 30^0 до 90^0 числитель дроби увеличивается, знаменатель уменьшается. Дробь возрастает, то есть возрастает площадь сечения.

Рассмотрим рисунок. При $\alpha \to 90^0$ боковые ребра пирамиды удлиняются неограниченно (см. формулу для SB). Вершина пирамиды уходит в бесконечность. Высота пирамиды (и треугольника ASB) неограниченно возрастает, а вместе с ней и площадь сечения.

Пусть α уменьшается от 90^0 до 30^0; числитель дроби уменьшается, а знаменатель увеличивается, отчего уменьшается вся дробь, т.е. уменьшается площадь сечения. Уменьшаясь, угол α будет как угодно близко приближаться к своей проекции; пирамида при $\alpha \to 30^0$ превращается в собственное основание, а $S \to 0$.

Задача 3. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна *a*, а угол, образованный двумя боковыми гранями, равен α. Найти объем V конуса, описанного вокруг пирамиды.



Решение. $V = \frac{1}{9}\pi a^2 H$ (H – высота конуса и пирамиды не изображена на рисунке).

Определение высоты $H = \frac{a\, tgx}{\sqrt{3}}$ сводится к определению *tg x* (*x* – угол наклона ребер пирамиды к плоскости основания). Но из треугольника CKD видно, что $\sin x = \frac{DK}{CK} = \frac{tg\,30^0}{tg\frac{\alpha}{2}}$, откуда

$$tgx = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{tg\,30^0}{\sqrt{tg^2\frac{\alpha}{2} - tg^2 30^0}}; \; V = \frac{\pi a^3}{27\sqrt{tg^2\frac{\alpha}{2} - tg^2 30^0}}.$$

Исследование. Пусть *a* – постоянно. Границы изменения α (из формулы): $60^0 < \alpha < 180^0$. Геометрическим местом вершин D треугольников ADB будет ребро SC, перпендикулярное плоскости треугольника ADB, который можно считать проекцией треугольника ACB, а угол ADB проекцией угла ACB на плоскость ADB. Но проекция угла, образованного равными наклонными, больше самого угла, то есть $\alpha > 60^0$. С увеличением угла α высота DK треугольника ADB уменьшается и $DK \to 0$; боковые стороны AD и BD тоже уменьшаются, приближаясь к $\frac{a}{2}$. Угол α может быть сделан как угодно близким к 180^0, следовательно, геометрические соображения подтверждают границы изменения α. При $\alpha \to 60^0$, V неограниченно возрастает; при $\alpha \to 180^0$, $V \to 0$ вместе с H, конус вырождается в круг основания.