Грук Любовь Владимировна

Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение

средняя общеобразовательная школа №603

Фрунзенского района Санкт-Петербурга

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ РАЗНЫМИ СПОСОБАМИ

Решение задач есть неотъемлемая
часть человеческой деятельности.
Д. Пойа «Как решать задачу»

Известный математик Д. Пойа пишет в своей книге «Как решать задачу», что значительная доля нашей сознательной деятельности связана с решением каких-нибудь задач или проблем. В повседневной жизни мы часто оказываемся перед выбором того или иного пути выхода из какой-либо ситуации, стараемся посмотреть на проблему с разных сторон, перебираем варианты своих действий, стараясь достичь цели с наименьшими затратами. Практически также мы поступаем и при решении математических задач. Оценивая свое решение, пытаемся понять, есть ли другой способ рассуждений, например, более короткий или более красивый.

Огромное поле для такой деятельности предоставляет нам решение задач по геометрии. Обычный школьник, не особо интересующийся предметом, вряд ли сам будет искать разные способы решения одной и той же задачи. Чаще всего, получив ответ, он пойдет дальше. И только если учитель спросит, есть ли другие варианты рассуждений, задумается над этим. Значительная часть учащихся при этом про себя или вслух скажет: «Зачем нам это надо? Мы же решили. На экзамене нам только правильный ответ нужен. Какая разница, как это получилось?»

Действительно, зачем решать задачу разными способами? Во-первых, для проверки правильности ответа. Это достаточно веская причина для тех, кто делает только то, что «нужно на экзамене». Во-вторых, другой способ может оказаться более простым. В-третьих, при повторении в конце четверти, учебного года или при итоговом повторении в девятом классе на примере одной задачи можно повторить разные темы и методы. И, наконец, для сильных учащихся это возможность проявить себя, высказать интересную идею. Учитель может специально направить деятельность учащихся в нужную для себя сторону, чтобы отработать какой-то конкретный метод решения со всем классом, а отдельных учащихся попросить провести рассуждения другими способами и представить свои решения. Это особенно полезно при итоговом повторении. Можно обсудить, какие шаги надо сделать в каждом из случаев, а затем выбрать кратчайший путь.

Рассмотрим несколько стандартных задач из школьного учебника геометрии и решим их разными способами.

Задача 1. В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а боковая сторона равна 13 см. Найдите радиус окружности, вписанной в этот треугольник. (№689)

Дано: ΔABC
$AB = BC = 13$ см
$AC = 10$ см
Окр. (O, r) – вписанная
Найти: r

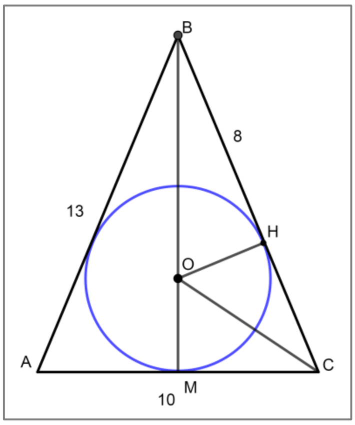

Рис.1

Данная задача рассматривается в курсе 8 класса в теме «Вписанная и описанная окружности». К этому моменту изучены подобие треугольников, свойство биссектрисы треугольника и соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника, следовательно, учащиеся могут использовать эти теоретические факты для решения задачи.

Решение

1-й способ. Проведем в ΔABC биссектрисы BM и CO, O – центр вписанной окружности, точки M и H – точки касания окружности и прямых AC и BC, OH и OM – радиусы, проведенные в точки касания. По свойству биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию, BM – медиана и высота. AM = MC = 5 см. По теореме Пифагора в ΔBMC получаем BM = 12 см. По свойству отрезков касательных CM = CH = 5 см. Тогда BH = BC – CH = 8 см. Эти результаты будут использованы и при решении задачи другими способами. (Рис. 1)

Треугольники BCM и BOH подобны по двум углам (углы BMC и BHO – прямые, угол B – общий). Тогда $\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BH}} = \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{OH}}$, $\mathrm{OH} = r = \frac{\mathrm{BH} \cdot \mathrm{MC}}{\mathrm{BM}} = \frac{8 \cdot 5}{12} = \frac{10}{3}$ см.

2-й способ. Центром вписанной окружности треугольника ABC является точка пересечения биссектрис. Тогда в ΔBMC CO – биссектриса угла C и по свойству биссектрисы $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OM}}$. Так как OM = r, то BO = BM – r. Получаем $\frac{13}{5} = \frac{12 - r}{r}$, $13r = 60 - 5r$, $18r = 60$, $r = \frac{10}{3}$ см.

3-й способ. В ΔBMC угол M – прямой, BM = 12 см, CM = 5 см и $\mathrm{tg}\angle \mathrm{MBC} = \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{BM}} = \frac{5}{12}$. В прямоугольном треугольнике BHO (угол H – прямой) $\mathrm{tg}\angle \mathrm{OBH} = \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{BH}} = \frac{5}{12}$, следовательно, OH = BH · $\mathrm{tg}\angle \mathrm{OBH}$ = 8 · $\frac{5}{12} = \frac{10}{3}$ см.

4-й способ. Используем метод площадей. Площадь описанного многоугольника можно найти по формуле $S = pr$, где p – полупериметр. Найдем площадь ΔABC. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BM = 60$ см^2, p = 18 см.

Тогда $r = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$ см.

Замечание. В учебнике №689 – первая из задач параграфа. Учащиеся впервые знакомятся с понятием окружности, вписанной в многоугольник. Поэтому важно обсудить с ними положение центра вписанной окружности, определить, какой отрезок является её радиусом. Тогда имеет смысл отдать предпочтение первым двум способам решения как более общим. Можно вернуться к этой задаче на обобщающем уроке по теме «Окружность» и при повторении в конце года. Тогда имеет смысл рассмотреть все способы решения, особенно отметив метод площадей. Ясно, что этот способ самый короткий. Он хорошо иллюстрирует, как полезно знать формулы.

Задача 2. Угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника, равен 120°, боковая сторона треугольника равна 8 см. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника. (№707)

Данная задача также рассматривается в теме «Вписанная и описанная окружности» (8 класс), поэтому учащиеся еще не знакомы с теоремой синусов. Особое внимание надо обратить на чертеж к задаче и сначала обсудить положение треугольника относительно центра окружности.

Дано: ΔABC
$AB = BC = 8$ см
$\angle ABC = 120°$
Окр. (O, d) – описанная
Найти: d

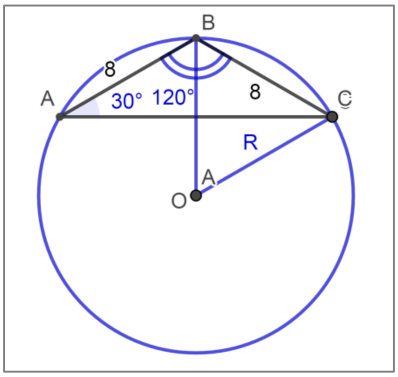

Рис. 2

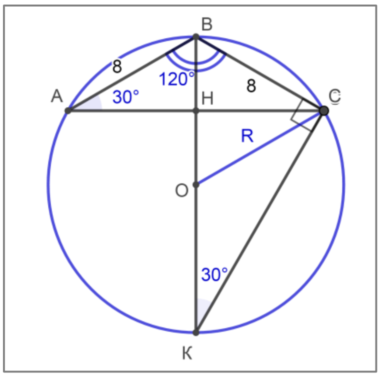

Рис. 3

Решение

1-й способ (рис. 2). Так как ΔABC – тупоугольный, то центр O описанной окружности лежит вне треугольника. Проведем радиусы OB и OC. По условию угол при вершине B равен 120°. Углы при основании равнобедренного треугольника равны, и по теореме о сумме углов треугольника $\angle A = \angle C = 30°$.

Вписанный угол ВАС равен половине дуги ВС, поэтому дуга ВС и центральный угол ВОС равны 60°. В равнобедренном ΔВОС угол при вершине равен 60°, поэтому ΔВОС – равносторонний и ВО = ОС = ВС = 8 см, а значит, диаметр окружности равен 16 см.

2-й способ (рис. 3). Проведем диаметр ВК и хорду СК. Вписанный угол ВСК – прямой, так как опирается на диаметр. Углы ВАС и ВКС равны, так как опираются на одну дугу, значит, ∠ВКС = 30°. В прямоугольном ΔВСК катет ВС, равный 8 см, лежит напротив угла в 30°, поэтому ВК = 2ВС = 16 см, значит, диаметр окружности равен 16 см.

3-й способ (рис. 4).

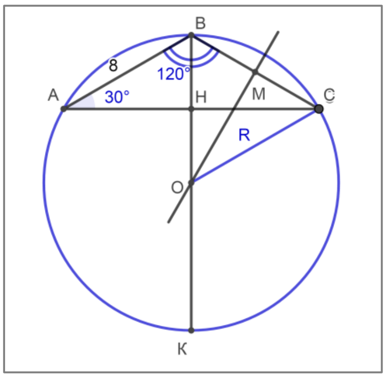

Рис. 4

Точка О – точка пересечения серединных перпендикуляров ВК и ОМ. Точка М – середина отрезка ВС, ВМ = 4 см. В прямоугольном ΔВМО угол В равен 60°. $\mathrm{OB} = \frac{\mathrm{BM}}{\cos 60^\circ} = 4 : \frac{1}{2} = 8$ см, ВК = 16 см.

4-й способ. По следствию из теоремы синусов $2R = \frac{\mathrm{BC}}{\sin \mathrm{A}} = \frac{8}{\sin 30^\circ} = 16$ см.

5-й способ. В прямоугольном ΔАВН найдем ВН = 0,5АВ = 4 см,

$\mathrm{AH} = \mathrm{BH}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ см. Тогда АС = 2АН = $8\sqrt{3}$ см.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4 = 16\sqrt{3}$ см². $R = \frac{abc}{4S} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 8\sqrt{3}}{4 \cdot 16\sqrt{3}} = 8$ см, ВК = 16 см.

Замечание. Последние два способа доступны учащимся только в 9-м классе. При итоговом повторении можно повторить разные формулы площади треугольника. Во 2-м способе используется полезное построение – продлить высоту до диаметра и провести хорду, чтобы получить прямоугольный треугольник. Эту идею хорошо показывать в 11-м классе и использовать при решении задач по теме «Тела вращения» для нахождения радиуса сферы, описанной около конуса.

Задача 3. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, боковые стороны которого равны 10 см, а основание – 12 см.

Дано: ΔABC
AB = BC = 10 см
AC = 12 см
Окр. (O, R) – описанная
Найти: R

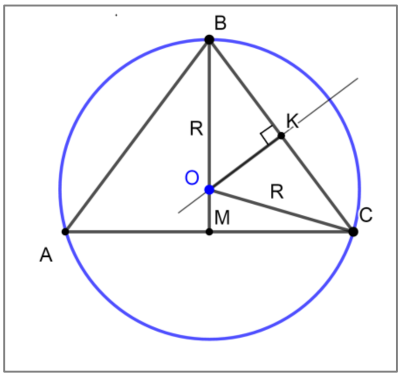

Рис.5

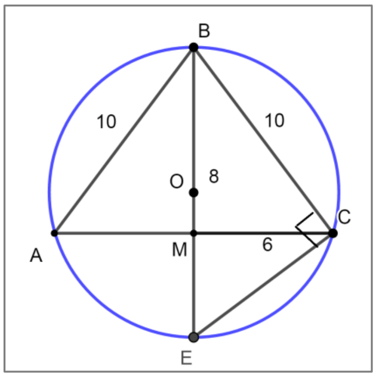

Рис.6

Решение

1-й способ (рис. 5). Центром описанной окружности треугольника является точка O – точка пересечения серединных перпендикуляров BM и OK, отрезки OB и OC - радиусы. BK = KC = 5 см, AM = MC = 6 см. Из прямоугольного ΔBMC по теореме Пифагора находим BM = 8 см. Треугольники BMC и BKO подобны по 1-му признаку подобия (углы M и K – прямые, угол B – общий). Тогда $\frac{BM}{BK} = \frac{BC}{BO}$, $BO = \frac{BK \cdot BC}{BM} = \frac{25}{4}$ см. R = 6,25 см.

2-й способ (рис. 5). В ΔBMC $\angle M = 90°$, BC = 10 см, BM = 8 см, $\cos\angle CBM = \frac{BM}{BC} = 0{,}8$. В ΔBKO $\angle K = 90°$, BK = 5 см, $\cos\angle KBO = \frac{BK}{BO} = 0{,}8$. Тогда $BO = R = \frac{BK}{\cos\angle KBO} = \frac{5}{0{,}8} = 6{,}25$ см.

3-й способ (рис. 5). В ΔMOC $\angle M = 90°$, MC = 6 см, OC = R,
OM = BM – BO = 8 – R. По теореме Пифагора $OC^2 = OM^2 + MC^2$,
$R^2 = (8 - R)^2 + 6^2$, $16R = 100$, $R = 6{,}25$ см.

4-й способ (рис. 6). Пусть E – точка пересечения прямой BM и окружности, CE – хорда. Вписанный угол BCE – прямой, так как опирается на диаметр. В прямоугольном ΔBCE CM = 6 см – высота, проведенная к гипотенузе. По свойству высоты $\mathrm{CM}^2 = \mathrm{BM} \cdot \mathrm{ME}$,

$\mathrm{ME} = \mathrm{CM}^2 : \mathrm{BM} = 36 : 8 = 4{,}5$ см. BE = 2R = BM + ME = 8 + 4,5 = 12,5 см.

Тогда R = 6,25 см.

5-й способ (рис. 5). По следствию из теоремы синусов в ΔABC получаем: $\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle C} = 2R$, $R = \frac{AB}{2\sin\angle C}$. В ΔBMC ∠M = 90°, BC = 10 см, MC = 6 см,

$\sin\angle\mathrm{BCM} = \frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BC}} = 0{,}8$. Тогда $R = \frac{10}{2\cdot 0{,}8} = 6{,}25$ см.

6-й способ. Используем формулу $R = \frac{abc}{4S}$. Найдем площадь треугольника по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

$S = \sqrt{16(16-10)(16-10)(16-12)} = 48$ см^2, $R = \frac{10\cdot 10\cdot 12}{4\cdot 48} = 6{,}25$ см.

7-й способ (рис. 7)

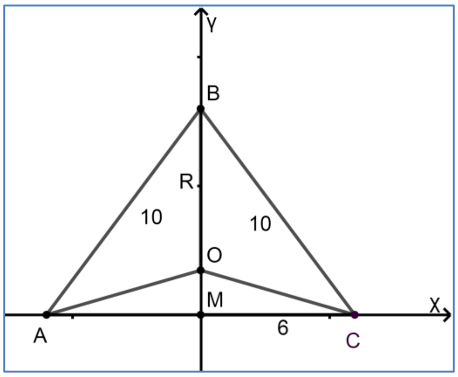

Рис. 7

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке M. Найдем координаты точек: M(0; 0), A(-6; 0), B(0; 8), C(6; 0). Точка O(0; *к*) – центр описанной окружности, она равноудалена от вершин треугольника, значит, OA = OB = OC. По формуле расстояния между точками получаем:

$\sqrt{(-6)^2 + к^2} = \sqrt{(8-к)^2} = \sqrt{6^2 + к^2}$, $(8-к)^2 = 6^2 + к^2$, $28 = 16к$, к = 1,75.

Тогда R = 8 – 1,75 = 6,25 см.

Замечание. Данную задачу можно предложить как при изучении темы «Вписанная и описанная окружности», так и при повторении в конце 8-го класса, рассмотрев первые четыре способа решения. В 9-м классе можно вернуться к ней снова и показать другие способы решения. При итоговом повторении курса планиметрии и подготовке к экзаменам эту задачу также можно использовать, так как разные способы решения позволяют рассмотреть основные методы решения геометрических задач: метод подобия, использование тригонометрии, метод площадей, метод координат. Сравнение разных способов позволяет выбрать оптимальный вариант для решения, а каждый учащийся сможет выбрать для себя тот способ, который будет ему понятней всего. А это залог успеха. Главное – решать самостоятельно.

Литература

1) Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов и др. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций. – М.: Просвещение, 2013.
2) Д. Пойа. Как решать задачу. – М.: Учпедгиз, 1961.