III Всероссийский фестиваль методических разработок "КОНСПЕКТ УРОКА"
1 февраля - 15 апреля 2014 года

Маховер Михаил Сергеевич

Государственное бюджетное образовательное учреждение Василеостровского района г. Санкт-Петербурга

Жувикина Ирина Алексеевна

Санкт-Петербургское государственное казенное учреждение «Дирекция наукограда Российской Федерации г. Петергофа»

УРОК ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ:
«С3 – ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ»

Предлагается обобщенный метод интервалов для решения неравенств, в которых неизвестная величина находится под знаком функции, не сводящейся к рациональному выражению. Применение предлагаемого метода проиллюстрировано на примерах.

В качестве заданий С3 на едином государственном экзамене по математике часто предлагаются неравенства, в которых неизвестная величина находится под знаком логарифмической или другой функции, не сводящейся к рациональной. На этом уроке мы покажем, как использование такого свойства функций как возрастание (убывание) позволяет найти решение некоторых из таких неравенств более быстрым путем, чем при использовании обычного метода интервалов.

Рассмотрим пример решения логарифмического неравенства с помощью обычного метода интервалов.

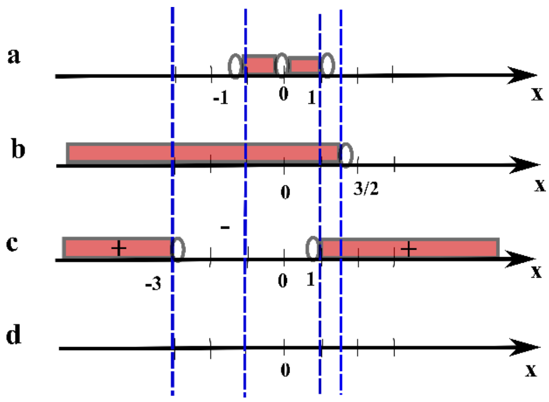
Задача 1 [1]. Решить неравенство $\log_{x^2}(3-2x) > 1$.

Решение. Способ 1.

Исходное неравенство эквивалентно логической совокупности (логическое «НЕИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ») двух систем неравенств

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x^2 < 1 & (1a) \\ 3-2x > 0 & (1b) \\ 3-2x < x^2 & (1c) \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 > 1 & (2a) \\ 3-2x > 0 & (2b) \\ 3-2x > x^2 & (2c) \end{cases} \end{array}\right.$$

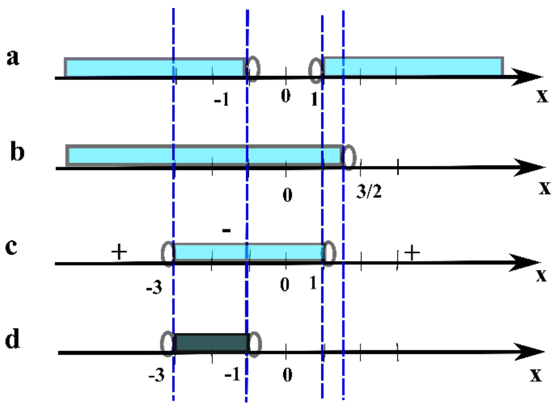
Рассмотрим сначала первую систему неравенств. Неравенство (1a) можно представить в виде $0 < |x| < 1$, его решение $x \in]-1;0[\cup]0;1[$, соответствующее множество точек числовой оси изображено на рис. 1a.



Неравенство (1b) имеет решение $x \in]-\infty;\frac{3}{2}[$, см. рис. 1b.

Сведя неравенство (1c) к виду, $(x+3)(x-1) > 0$, с помощью метода интервалов найдем его решение $x \in]-\infty;-3] \cup [1;\infty[$, см. рис. 1c.

Числовые множества на рис.1a, 1b и 1c расположены таким образом, что не существует точек числовой оси, принадлежащих одновременно всем трем множествам (рис. 1d). Следовательно, система неравенств (1a), (1b), (1c) решений не имеет.



Рассмотрим вторую систему неравенств. Неравенство (2a) сводится к $(x-1)(x+1) > 0$ и его решение

Конференц-зал
электронный журнал
электронное средство массовой информации
ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

согласно методу интервалов имеет вид $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, см. рис. 2a. Неравенство (2b) совпадает с (1b), его решение $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, соответствующий интервал представлен на рис. 2b. Неравенство (2c) решается методом интервалов аналогично (1c), его решение $x \in]-3; 1[$ приведено на рис. 2c. Множества точек на числовой оси, соответствующие решениям неравенств (2a), (2b), (2c) имеют общий интервал $]-3; -1[$, что показано на рис.2d. С учетом того, что система неравенств (1a), (1b), (1c) решений не имеет, этот интервал и является решением задачи.

Ответ: $x \in]-3; -1[$.

Обобщенный метод интервалов

Покажем, как можно использовать свойство возрастания – убывания функции для существенного упрощения решения сложных неравенств. Допустим, исходное неравенство удалось свести к следующему виду:

$$\frac{f\big(P_1(x)\big) - f\big(P_2(x)\big)}{g\big(P_3(x)\big) - g\big(P_4(x)\big)} > 0, \qquad (3)$$

где f и g - возрастающие или убывающие функции, $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$, $P_4(x)$ – многочлены, которые несложно разложить на простые множители, например, многочлены второй степени.

По определению, функция является возрастающей (убывающей), если для любых двух значений аргумента этой функции большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Поэтому, если функция f является возрастающей, тогда из этого определения следует, что знак разности $f\big(P_1(x)\big) - f\big(P_2(x)\big)$ совпадает со знаком разности $P_1(x) - P_2(x)$; если функция f является убывающей, то знаки этих разностей противоположны. Аналогично, и разность $g\big(P_3(x)\big) - g\big(P_4(x)\big)$ имеет такой же знак, как и $P_3(x) - P_4(x)$, если функция g возрастает, и противоположный, если эта функция убывает. Поэтому если функции f и g являются одновременно возрастающими или одновременно убывающими, то неравенство (3) эквивалентно

ISSN 2223-4063
www.konf-zal.com
konf-zal@mail.ru

$$\frac{P_1(x) - P_2(x)}{P_3(x) - P_4(x)} > 0, \qquad (4)$$

а если одна из этих является возрастающей, а другая убывающей, то неравенство (3) эквивалентно

$$\frac{P_1(x) - P_2(x)}{P_3(x) - P_4(x)} < 0. \qquad (5)$$

Любое из получившихся неравенств (4) и (5) легко решается обычным методом интервалов.

Решим теперь неравенство задачи 1 с помощью предлагаемого обобщенного метода интервалов.

Способ 2. Избавившись от неизвестной величины в основании логарифма, сведем неравенство к

$$\frac{\ln(3x-2)}{\ln x^2} - 1 > 0, \qquad (6)$$

здесь $\ln z$ обозначает натуральный логарифм (т.е. логарифм по основанию $e \approx 2{,}718\ldots$) числа z.

Если школьнику непривычно иметь дело с натуральным логарифмом, он может использовать и любое другое основание, например, в выражении (6) написать десятичный логарифм.

Приведя левую часть (6) к общему знаменателю, и использовав равенство $0 = \ln 1$, получим

$$\frac{\ln(3x-2) - \ln x^2}{\ln x^2 - \ln 1} > 0. \qquad (7)$$

Неравенство (7) имеет вид (3), причем $f(z) = g(z) = \ln z$. Поскольку функции f и g одновременно возрастают, то неравенство (7) эквивалентно

$$\frac{3 - 2x - x^2}{x^2 - 1} > 0. \qquad (8)$$

Разложив числитель и знаменатель дроби в выражении (8) на простые множители, получим

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)} < 0. \qquad (9)$$

Обычный метод интервалов для (9) дает окончательное решение.

Ответ: $x \in]-3; -1[$.

Задача 2 [2]. Решить неравенство $\log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \leq 0$.

Решение. С учетом ОДЗ $x > 2$ избавимся от неизвестной в основании логарифма:

$$\frac{\ln(x-2)}{\ln x} \cdot \frac{\ln(x+2)}{\ln x} \leq 0. \qquad (10)$$

Использовав равенство $0 = \ln 1$, приведем выражение (10) к виду

$$\frac{\ln(x-2) - \ln 1}{\ln x - \ln 1} \cdot \frac{\ln(x+2) - \ln 1}{\ln x - \ln 1} \leq 0. \qquad (11)$$

Замечая, что каждый из сомножителей левой части неравенства (11) имеет вид (3), и с учетом возрастания функции $\ln z$, получим

$$\frac{(x-2-1)(x+2-1)}{(x-1)(x-1)} \leq 0, \qquad (12)$$

или

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} \leq 0. \qquad (13)$$

С помощью обычного метода интервалов получаем

Ответ: $x \in \{3\}$.

Задача 3 [2]. Решить неравенство

$$\frac{2^{x^2} - 2}{\ln(x+2)} > 0. \qquad (14)$$

Решение. Использовав равенство $0 = \ln 1$, приведем неравенство (14) к виду

$$\frac{2^{x^2} - 2^1}{\ln(x+2) - \ln 1} > 0. \qquad (15)$$

Неравенство (15) имеет вид (3), причем $f(z) = 2^z$, $g(z) = \ln z$. Принимая во внимание, что обе эти функции возрастают, имеем

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2 - 1} > 0, \qquad (16)$$

что эквивалентно

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} > 0. \qquad (17)$$

Ответ: $x \in \,]1; +\infty[$.

Список литературы

1. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Учеб. пособие/ В.К. Егерев, Б.А. Кордемский, В.В. Зайцев и др.; Под. ред. М.И. Сканави – 6-е изд., испр. и доп. – М.: ООО «Гамма С.А.» АО «Столетие», 1999. – 560с.

ЕГЭ 2013. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий/ И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов и др.; под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М.: Издательство «Экзамен» 2013, 215[1] с. (Серия «ЕГЭ Типовые тестовые задания»)